

# ELEMENTARE DIFFERENTIALGEOMETRIE

Roland DUDUCHAVA

UNIVERSITÄT des SAARLANDES, SAARBRÜCKEN, WS 2004/2005,  
WS 2005/2006 und WS 2006/2007  
Vorlesungsskript

## INHALTSVERZEICHNIS

<b>1</b>	<b>EINLEITUNG</b>	<b>3</b>
1.1	Implizite Kurven: Beispiele . . . . .	3
1.2	Parametrisierte ebene Kurven, Polarkoordinatendarstellung . . . . .	6
1.3	Rollkurven . . . . .	8
1.4	Raumkurven: Beispiele . . . . .	12
1.5	Euklidischer Raum . . . . .	14
1.6	Bilineare und quadratische Formen . . . . .	17
1.7	Vektorprodukt in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	19
1.8	Hilfsmaterial . . . . .	22
	<b>Übungen</b>	<b>26</b>
<b>2</b>	<b>KURVENTHEORIE</b>	<b>27</b>
2.1	Grundlegende Begriffe . . . . .	27
2.2	Lokale Kurventheorie im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	30
2.3	Globale Kurventheorie . . . . .	44
	<b>Übungen</b>	<b>59</b>
<b>3</b>	<b>FLÄCHENTHEORIE</b>	<b>65</b>
3.1	Parametrisierte Flächen . . . . .	65
3.2	Erste Fundamentalform . . . . .	71
3.3	Zweite Fundamentalform . . . . .	75
3.4	Die geometrische Bedeutung der ersten Fundamentalform . . . . .	82
3.5	Die geometrische Bedeutung der zweiten Fundamentalform . . . . .	83
3.6	Weingarten Abbildung und Krümmungen . . . . .	87
3.7	Eingebettete Flächen . . . . .	94
3.8	Rotationsflächen . . . . .	98
3.9	Regelflächen . . . . .	100

3.10	Minimalflächen . . . . .	103
3.11	Minimalflächen und isotherme Parametrisierung . . . . .	108
3.12	Minimalflächen und Funktionentheorie . . . . .	110
3.13	Klassische Beispiele von Minimalflächen . . . . .	115
	<b>Übungen</b>	<b>120</b>
<b>4</b>	<b>INNERE GEOMETRIE VON FLÄCHEN</b>	<b>127</b>
4.1	Isometrien . . . . .	127
4.2	Konforme Abbildungen . . . . .	136
4.3	Die partiellen Differentialgleichungen der Flächentheorie . . . . .	138
4.4	Die kovariante Ableitungen . . . . .	150
4.5	Günter'sche und Stoke'sche Ableitungen . . . . .	152
4.6	X-Gradient und X-Divergenz . . . . .	156
4.7	Parallelverschiebung und geodätische . . . . .	160
4.8	Der Satz von Gauß–Bonnet . . . . .	171
	<b>Übungen</b>	<b>179</b>
	<b>LITERATURVERZEICHNIS</b>	<b>181</b>

## Vorwort

Dieses Skript ist entstanden aus Vorlesungen im WS 2004 und WS 2006 an der Universität des Saarlandes und basiert auf dem Vorlesungskript von Prof. M. Grüter [Gr], dem Buch von M. P. do Carmo [Car] und dem Manuskript R. Duduchava, D.Mitrea, M.Mitrea [DMM]. Für die Bilder haben wir die Programme von H. Reckziegel, M. Kriener, K. Pawel [RKP] verwendet.

Ich bedanke mich herzlich bei Frau C. Stoffer und, besonders, bei Frau L. Weggler die beim Vorbereiten des Manuskripts wesentliche Hilfe geleistet haben.

Saarbrücken, 18. November

Roland Duduchava

# 1 EINLEITUNG

Die klassische (oder elementare) Differentialgeometrie untersucht lokale Eigenschaften von Kurven und Flächen. Wichtig ist also, wie sich Kurven und Flächen in einer kleinen Umgebung eines Punktes verhalten. Mathematische Methoden für solche Studien liefern die Differentialrechnung und die lineare Algebra.

Umgekehrt liefert die Differentialgeometrie eine Möglichkeit Differentialrechnung auf Mannigfaltigkeiten (unter anderem auf Flächen) zu betreiben. Diesen zweiten Aspekt lassen wir in diesem Skript außer Acht und konzentrieren uns auf der Eigenschaften von Kurven und Flächen also, auf die klassische Differentialgeometrie.

Der repräsentativste Teil der klassischen Differentialgeometrie ist das Studium von Flächen. Dazu müssen wir die Eigenschaften von Kurven studieren.

## 1.1 IMPLIZITE KURVEN: BEISPIELE

### Beispiel 1.1 Die Gerade

$$ax + by + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad (a, b) \neq (0, 0)$$

beschreibt die Menge

$$\left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c = 0 \right\}.$$

$$b \neq 0 - \text{Graph von } x \mapsto -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b};$$

$$a \neq 0 - \text{Graph von } y \mapsto -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}.$$

**Beispiel 1.2** Ein Kreis mit Radius  $R > 0$  und Mittelpunkt  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  ist die Lösung der Gleichung

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0, \quad R > 0.$$

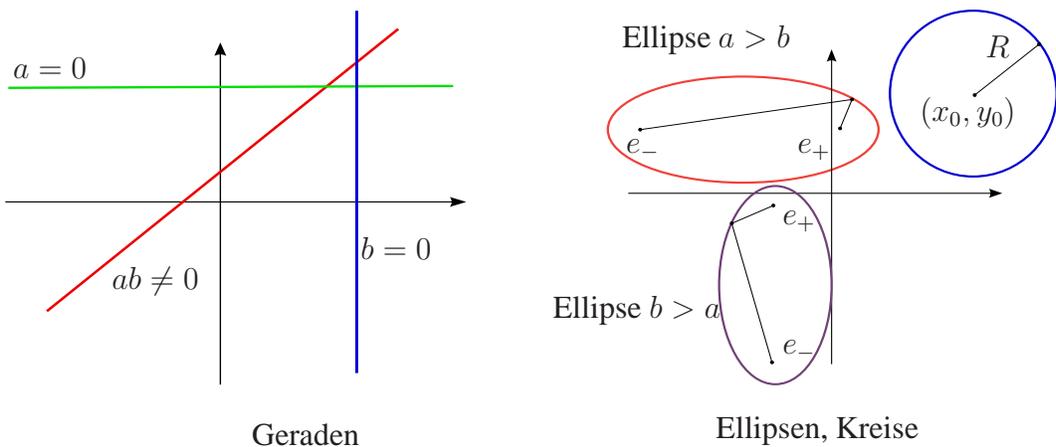


Fig. 1.1

**Beispiel 1.3** Eine **Ellipse** mit den Halbachsen  $a$  und  $b$  wird beschrieben durch die Gleichung

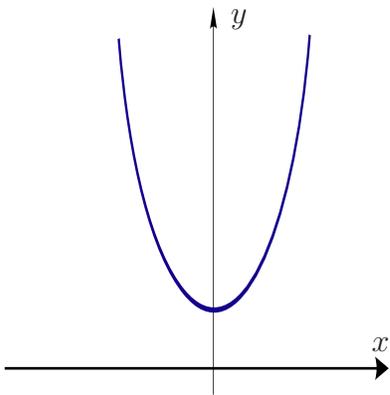
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - 1 = 0;$$

In Worten: die Menge aller Punkte  $(x, y)$  mit vorgegebener Abstandssumme zu zwei festen Brennpunkten  $e_+, e_-$ :

$$\begin{aligned} e_- &= (x_0 - \rho, y_0)^\top, & e_+ &= (x_0 + \rho, y_0)^\top, & \rho &:= \sqrt{a^2 - b^2} & \text{für } a > b, \\ e_- &= (x_0, y_0 - \rho)^\top, & e_+ &= (x_0, y_0 + \rho)^\top, & \rho &:= \sqrt{b^2 - a^2} & \text{für } b > a. \end{aligned}$$

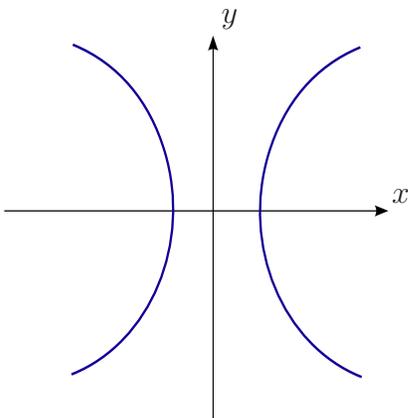
**Beispiel 1.4 Kegelschnitte:** Ebene Kurven, die sich durch quadratische Gleichungen beschreiben lassen, heißen **Kegelschnitte**; Beispiele sind **Ellipsen** (speziell **Kreise**), **Parabeln** (vgl. Fig. 1.2), **Hyperbeln** (vgl. Fig. 1.3), **Punkte**:  $x^2 + y^2 = 0$  oder die **leere Menge**:  $x^2 + y^2 + 1 = 0$ , letztere sind entartete Kreise oder entartete Ellipsen.

**Bemerkung:** Kegelschnitte weil jede diese Kurve lässt sich als der Schnitt von Kegel mit die Ebene darstellen (vgl Formel (1.7)).

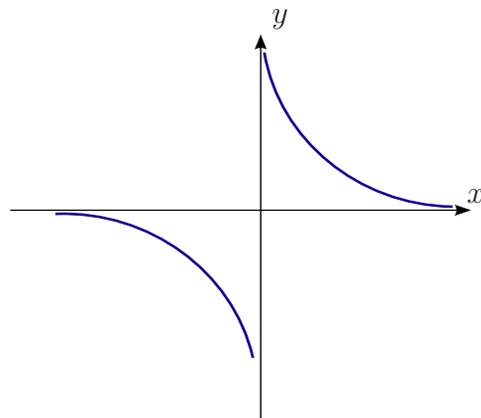


Parabeln:  $y - x^2 = 1$

Fig. 1.2



Hyperbel:  $x^2 - y^2 = 1$



Hyperbel:  $xy = 1$

Fig. 1.3

und auch Geraden

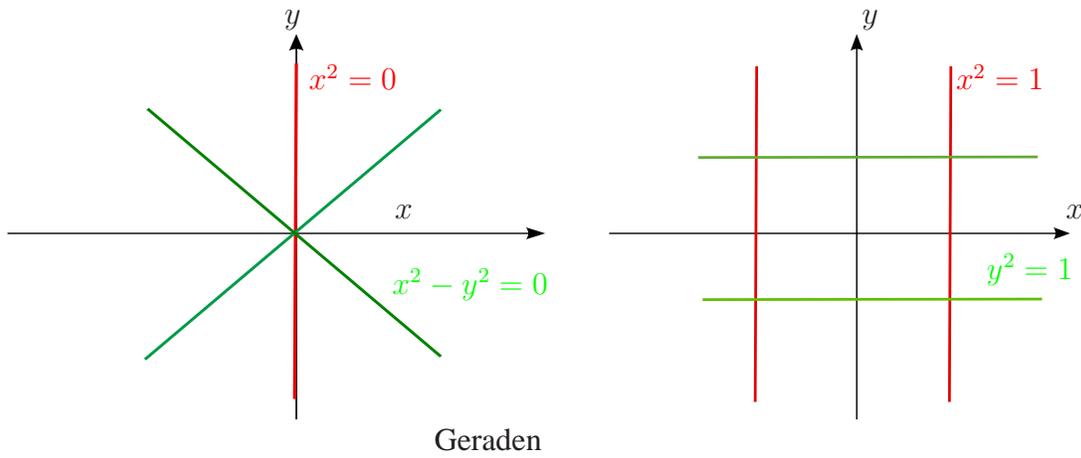
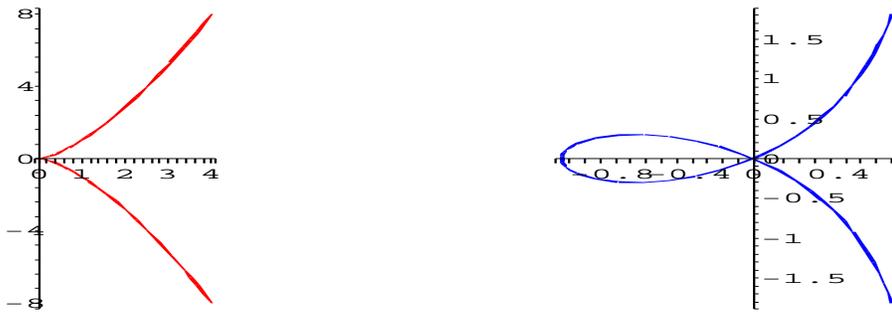


Fig. 1.4



Neil'sche Parabel:  $y^2 - x^3 = 0$       Strophoide:  $y^2(a - x) - x^2(a - x) = 0, \quad a > 0$

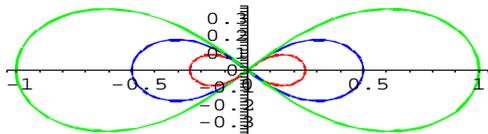
Fig. 1.5

**Beispiel 1.5 Polynome höheren Grades.**  
*Cassini'sche Kurven (algebraische Kurventheorie; vgl. Fischer, Brieskorn-Knörrer):*

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) + 1 - c = 0, \quad c > 0.$$

*Spezialfall  $c = 1$  Lemniskate (vgl. Fig. 1.6):*

$$x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0.$$



Lemniskate

Fig. 1.6

## 1.2 PARAMETRISIERTE EBENE KURVEN, POLARKOORDINATENDARSTELLUNG

**Beispiel 1.6** a. Gerade in  $\mathbb{R}^2$ :  $R \ni t \mapsto (at + b, ct + d)^\top$ ,  $(a, c) \neq (0, 0)$ .  
 b. Kreislinie:  $R \ni t \mapsto (\cos t, \sin t)^\top = e^{it}$ .

**Achtung:** Die parametrisierten Kurven

$$\begin{aligned}\alpha &: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, & \alpha(t) &= e^{it}, \\ \beta &: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, & \beta(t) &= e^{2it}, \\ \gamma &: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, & \gamma(t) &= e^{-it}\end{aligned}$$

sind verschieden, haben aber dieselbe Spur, nämlich den Einheitskreis

$$S^1 = \alpha([0, 2\pi)) = \beta([0, 2\pi)) = \gamma([0, 2\pi)) = \left\{ (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \right\}.$$

c. Ellipse:  $[0, 2\pi) \ni t \mapsto (a \cos t, b \sin t)^\top$ .

d. Hyperbel:  $R \ni t \mapsto (\cosh t, \sinh t)^\top$ .

e. Parabel:  $R \ni t \mapsto (t, t^2)^\top$

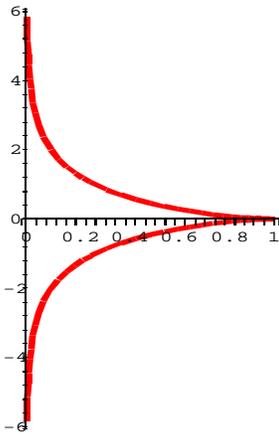
**Beispiel 1.7** Eine Traktrix ist die folgende parametrisierte Kurve

$$\alpha(t) = \left( \sin t, \cos t + \log \left[ \tan \frac{t}{2} \right] \right)^\top, \quad 0 < t < \pi, \quad (1.1)$$

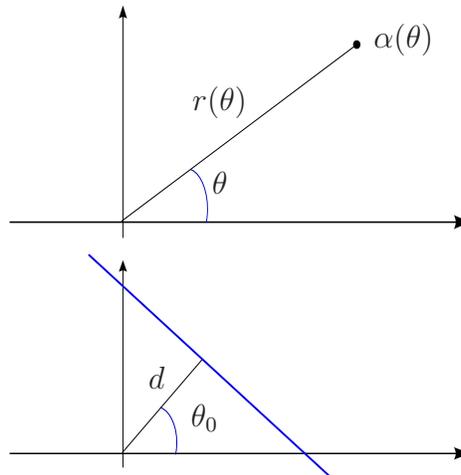
sie lautet als explizite Kurve

$$y = \pm a \operatorname{arc} \cosh \frac{a}{x} \pm \sqrt{a^2 - x^2}, \quad 0 < x < a \quad (1.2)$$

(der Kurve (1.1) entspricht der Fall  $a = 1$ ).



Traktrix  $a = 1$   
Fig. 1.7



Polarkoordinaten  
Fig. 1.8

### Polarkoordinatendarstellung ebener Kurven

$$\alpha(\theta) = \theta \mapsto r(\theta)e^{i\theta} = r(\theta)(\cos \theta, \sin \theta).$$

- für  $r = \text{const} > 0$  erhalten wir eine Kreislinie
- für  $\rho > 0$  und Brennpunkt im  $(0, 0)$  folgt mit

$$r(\theta) = \frac{\rho}{1 - \varepsilon \cos \theta} \begin{cases} |\varepsilon| < 1 : & \text{Ellipse} \\ |\varepsilon| = 1 : & \text{Parabel } (0 < \theta < 2\pi) \\ |\varepsilon| > 1 : & \text{Hyperbel } \left( \arccos \frac{1}{\varepsilon} < \theta < 2\pi - \arccos \frac{1}{\varepsilon} \right) \end{cases}$$

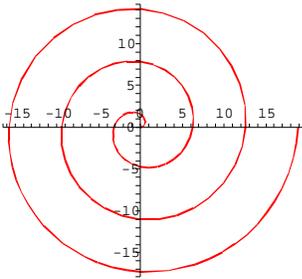
**Beispiel 1.8 Lemniskate** (vgl. Fig. 1.6)

$$r(\theta) = \sqrt{2 \cos(2\theta)}, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$$

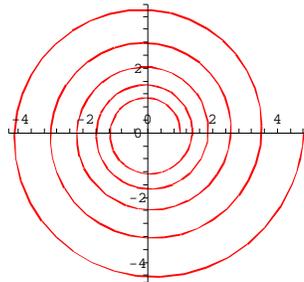
**Beispiel 1.9 Spiralen** sind Kurven in Polarkoordinatendarstellung, wobei  $\theta \geq 0$  oder  $\theta \in \mathbb{R}$  und  $r(\theta)$  monoton ist.

**Beispiel 1.10 Archimedische Spirale:**

$$r(\theta) = a\theta, \quad a > 0, \quad \text{oder parametrisiert} \quad \alpha(\theta) = a\theta e^{i\theta}$$



Logarithmische Spirale

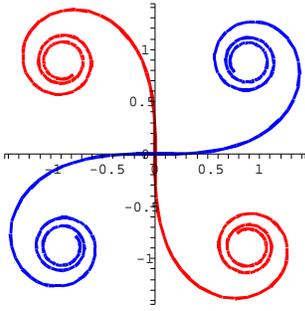


Archimedische Spirale

Fig. 1.9

**Beispiel 1.11 Logarithmische Spirale**

$$r(\theta) = be^{c\theta}, \quad b, c > 0, \quad \text{oder parametrisiert} \quad \alpha(\theta) = be^{(c+i)\theta}$$

**Beispiel 1.12 Klotoide** (*auch: Strassenbauerkurve, Cornu-Spirale*):

Klotoide

Fig. 1.10

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$\alpha(t) = \left( \int_0^{t/a} \cos\left(\frac{\tau^2}{2}\right) d\tau, \int_0^{t/a} \sin\left(\frac{\tau^2}{2}\right) d\tau \right)^\top \quad (1.3)$$

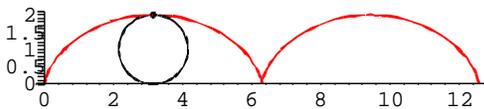
$$t \rightarrow \infty \implies \alpha(t) \rightarrow \left( \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)^\top.$$

Integrale in (1.3) heißen “**Fresnel’sche**”.

## 1.3 ROLLKURVEN

**Rollkurven** sind Bahnkurven von Punkten, die starr mit einem Kreis verbunden sind, der auf einer Geraden oder einem Kreis abrollt.

**Zykloide** ist eine spezielle Rollkurve erzeugt dadurch, dass ein Kreis mit Radius  $r > 0$  und Starrpunkt auf dem Rand auf einer Geraden (z.B. einer reellen Achse  $\mathbb{R}$ ) abrollt. Die entsprechende parametrisierte Kurve ist die Folgende:



Zykloide

Fig. 1.11

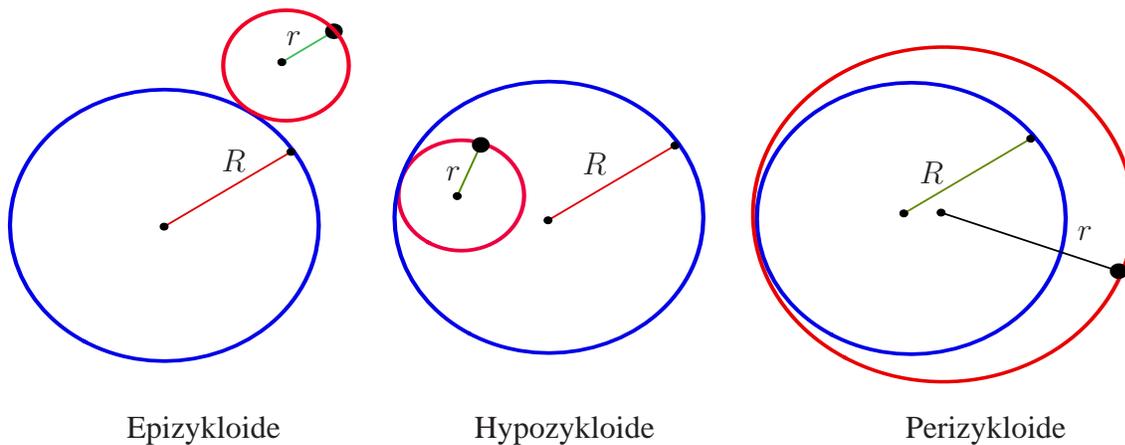
$$\alpha(\vartheta) = r (\vartheta - \sin \vartheta, 1 - \cos \vartheta)^\top$$

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Eine **Epizykloide** entsteht, wenn ein Kreis mit Radius  $r > 0$  und Starrpunkt auf dem Rand auf einem anderen Kreis mit Radius  $R > r$  von außen abrollt. Die entsprechende parametrisierte Kurve lautet für den Fall  $R = 1$ :

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$\alpha(\vartheta) = \left[ (R+r) \cos \vartheta - r \cos \frac{(R+r)\vartheta}{r}, (R+r) \sin \vartheta - r \sin \frac{(R+r)\vartheta}{r} \right]^\top.$$

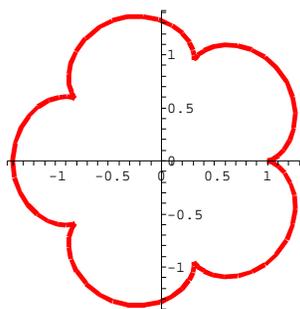


Epizykloide

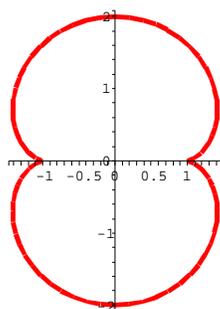
Hypozykloide

Perizykloide

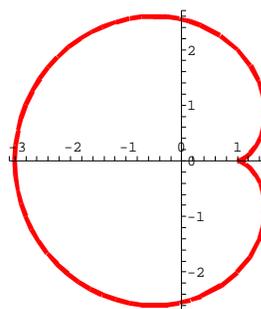
Fig. 1.12



Epizykloide  $R = 5r$



Nephroide  $R = 2r$

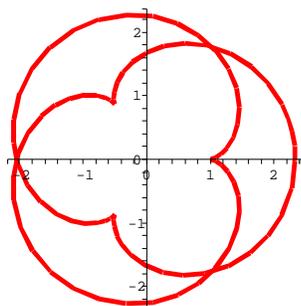


Kardioide  $R = r$

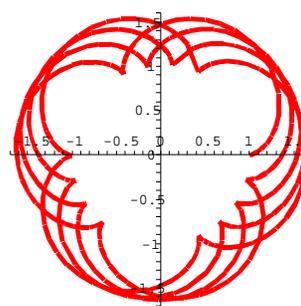
Fig. 1.13

Eine Epizykloide mit  $r = R/2$  heißt **Nephroide**.

Eine Epizykloide mit  $r = R$  heißt **Kardioide**.



Epizykloide  $2R = 3r$



Epizykloide  $R = \pi r$

Fig. 1.14

Eine **Hypozykloide** entsteht, wenn ein Kreis mit Radius  $r > 0$  und Starrpunkt auf dem Rand auf der Innenseite eines anderen Kreises mit Radius  $R > r$  abrollt. Die entsprechende parametrisierte Kurve lautet:

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \alpha(\vartheta) = \left[ (R-r) \cos \vartheta - r \cos \frac{(R-r)\vartheta}{r}, (R-r) \sin \vartheta - r \sin \frac{(R-r)\vartheta}{r} \right]^\top. \quad (1.4)$$

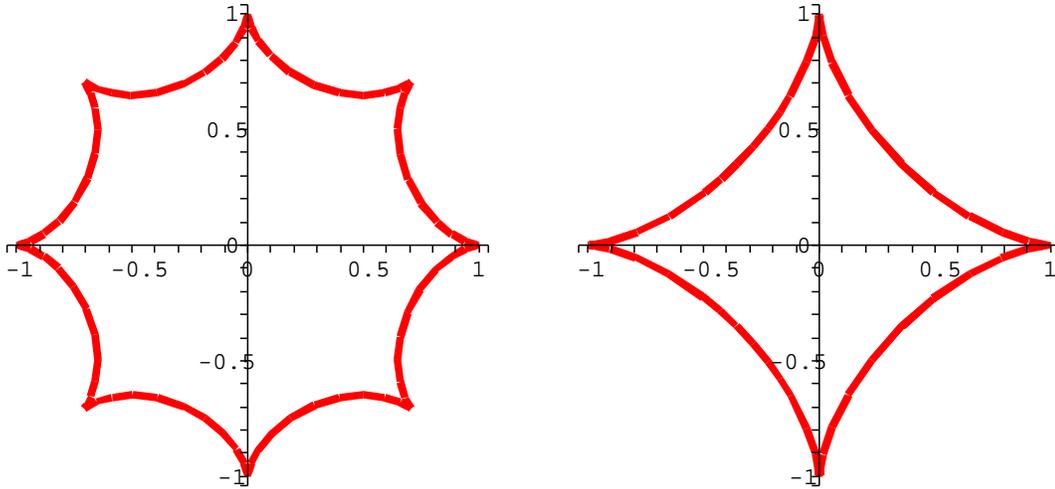
Hypozykloide  $R = 8r$ Astroide  $R = 4r$ 

Fig. 1.15

Eine **Perizykloide** entsteht, wenn ein Kreis mit Radius  $r > 0$  und Starrpunkt auf dem Rand einen anderen Kreis mit Radius  $R < r$  umschließend abrollt.

Eine Perizykloide mit  $r = 2R$  ist wieder eine **Kardioide**.

Eine **Trochoide** entsteht, wenn ein Kreis mit Radius  $r > 0$  und Starrpunkt mit Abstand  $a > 0$  vom Mittelpunkt des rollenden Kreises auf einem anderen Kreis mit Radius von außen abrollt. Für die Wahl  $a = r$  erhält man also wieder eine Zykloide. Zum Beispiel lautet die parametrisierte **Epitrochoide** folgendermaßen:

$$\alpha(\vartheta) = (R+r)e^{i(\vartheta+\pi/2)} \\ = \left[ a \sin \frac{(r+R)\vartheta}{r} - (r+R) \sin \vartheta, (R+r) \cos \vartheta - a \cos \frac{(r+R)\vartheta}{r} \right]^\top : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

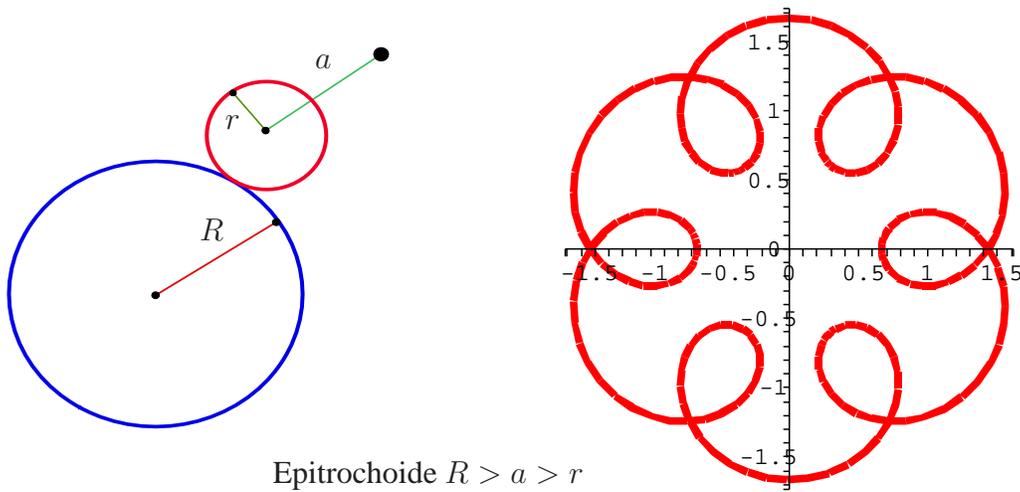


Fig. 1.16

Die Peritrochoide mit  $r = \frac{3}{2}R$  liefert die Form des Wankelmotors.

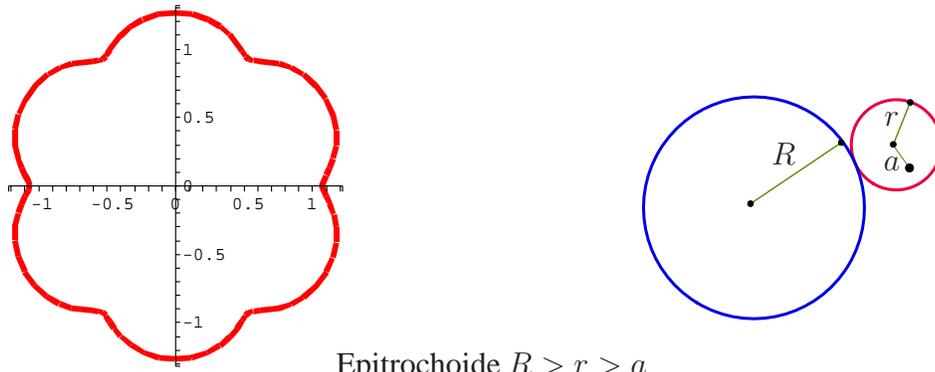


Fig. 1.17

Allgemein gilt: Die Spur jeder Perizykloide ist auch Spur einer Epizykloide. Ähnliches gilt für Peritrochoiden und Epitrochoiden.

**Bemerkung 1.13** Eine Rollkurve um einen festen Kreis ist geschlossen, vorausgesetzt der Bruch  $\frac{r}{R}$  ist rational; sonst liegt die Kurve dicht in dem Ringgebiet  $R \leq |z - z_0| \leq R + r$ , wobei  $z_0$  das Zentrum des festen Kreises ist.

## 1.4 RAUMKURVEN: BEISPIELE

**Raumkurven** werden bestimmt durch zwei Gleichungen:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0, \\ g(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Die Lösungen der Gleichung  $f = 0$ ,  $g = 0$  ergeben zwei Flächen, deren Durchschnitt eine Raumkurve ist (Folgerung aus dem "Satz über implizite Funktion" (siehe § 1.8).

Beispielsweise definiert das System

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \end{cases}$$

eine Gerade, falls die Vektoren  $(a_1, b_1, c_1)$ ,  $(a_2, b_2, c_2)$  linear unabhängig sind.

Für parametrisierte Raumkurven schreiben wir

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))^T : I \rightarrow \mathbb{R}^3. \quad (1.5)$$

Eine Gerade ist definiert durch das System

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1 = 0 & \text{Ebene} \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2 = 0 & \text{Ebene,} \end{cases} \quad (1.6)$$

vorausgesetzt die Vektoren  $(a_k, b_k, c_k)^T \in \mathbb{R}^3$ ,  $k = 1, 2$ , sind linear unabhängig, denn dadurch wird sicher gestellt, dass die Ebenen nicht parallel sind.

Ein Kegelschnitt entsteht, wenn sich ein Kegel mit einer Ebene schneidet:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 & \text{Kegel,} \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0 & \text{Ebene} \end{cases} \quad (1.7)$$

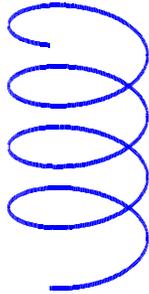
oder durch den Schnitt einer Sphäre mit einem Ellipsoid

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0 & \text{Sphäre,} \\ \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} - 1 = 0 & \text{Ellipsoid,} \end{cases} \quad (1.8)$$

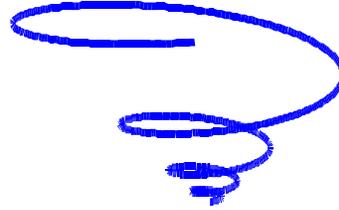
Allgemein definieren zwei Gleichungen

$$\begin{cases} F(x_1, x_2, x_3) = 0 & \text{Fläche,} \\ G(x_1, x_2, x_3) = 0 & \text{Fläche} \end{cases} \quad (1.9)$$

eine Raumkurve in  $\mathbb{R}^3$ .



Helix  
Fig. 1.18



Concho  
Fig. 1.19

**Beispiel 1.14 Helix oder Schraublinie:**

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt + c)^\top : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3. \quad (1.10)$$

**Beispiel 1.15 Concho:**

$$\alpha(t) = (a e^{bt} \cos t, a e^{bt} \sin t, e^{bt})^\top : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3. \quad (1.11)$$

**Beispiel 1.16 Toruskurven:**

$$\alpha_{\omega, \gamma}(t) = \begin{bmatrix} [R + r \cos(\omega t)] \cos(\gamma t) \\ [R + r \cos(\omega t)] \sin(\gamma t) \\ r \sin(\omega t) \end{bmatrix} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (1.12)$$

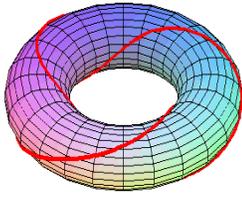
wobei  $\omega, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $R > r > 0$ . Die Spur dieser Kurven liegt auf dem Torus.

$$\alpha(\varphi, \theta) = \begin{bmatrix} [R + r \cos \theta] \cos \varphi \\ [R + r \cos \theta] \sin \varphi \\ r \sin \theta \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (1.13)$$

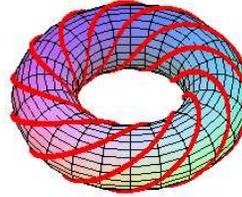
Wenn der Bruch  $\frac{\omega}{\gamma}$  rational ist, dann ist die Kurve geschlossen.

Ist der Bruch  $\frac{\omega}{\gamma}$  allerdings irrational, dann ist die Kurve nicht geschlossen, sondern liegt dicht auf dem Torus.

Eine Kurve  $\alpha_{m,n}$  mit ganzzahligem  $m$  und  $n$  heißen **Torusknoten**. Der Graph, der für die spezielle Wahl  $\alpha_{2,3}$  entsteht heißt **Kleeblattschlinge**.



Kleeblattschlinge:  $\alpha_{2,3}$



Toruskurve:  $\alpha_{5,12}$

Fig. 1.20

## 1.5 EUKLIDISCHER RAUM

Um Kurven zu definieren, brauchen wir den Begriff des Euklidischen Raumes: für ganzzahlige  $n \geq 1$  bezeichnet  $\mathbb{R}^n$  den **Euklidischen Raum**. Er besteht aus **Vektoren**  $x = (x^1, \dots, x^n)^\top$ , die als  $n$ -Tupel von reellen Zahlen  $x^1, \dots, x^n \in \mathbb{R}$  dargestellt sind. Wir betrachten die Vektoren als Spalten und verwenden den Index  $^\top$  für transponierte Vektoren und Matrizen.

$\mathbb{R}^n$  ist ein **linearer Raum**: für beliebige Vektoren  $x = (x^1, \dots, x^n)^\top$ ,  $y = (y^1, \dots, y^n)^\top$  im  $\mathbb{R}^n$  und für beliebige reellen Zahlen  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  ist die Summe

$$\lambda x + \mu y := (\lambda x^1 + \mu y^1, \dots, \lambda x^n + \mu y^n)^\top \in \mathbb{R}^n$$

wohldefiniert. Die Summe ist kommutativ  $x + y = y + x$ , assoziativ  $(x + y) + z = x + (y + z)$ ,  $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$  und distributiv  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ ,  $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$  für  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Außerdem existiert ein Nullelement  $0 \in \mathbb{R}^n$  mit der Eigenschaft  $x + 0 = x$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Weiterhin ist  $\mathbb{R}^n$  mit einem Skalarprodukt versehen. Das Skalarprodukt

$$(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} .$$

ist eine Abbildung von  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und ordnet dementsprechend jedem beliebigen Paar  $x = (x^1, \dots, x^n)^\top \in \mathbb{R}^n$  und  $y = (y^1, \dots, y^n)^\top \in \mathbb{R}^n$  eine reelle Zahl zu.

$$(x, y) := \sum_{j=1}^n x^j y^j . \tag{1.14}$$

Das Skalarprodukt wird auch mit dem Verknüpfungszeichen “Punkt” dargestellt

$$x \cdot y = (x, y) := \sum_{j=1}^n x^j y^j . \quad (1.15)$$

Das Skalarprodukt ist bilinear:

$$(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z), \quad (z, \lambda x + \mu y) = \lambda(z, x) + \mu(z, y)$$

für  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

Die nichtnegative Zahl

$$|x| := \sqrt{(x, x)} = \left[ \sum_{j=1}^n (x^j)^2 \right]^{1/2} \quad (1.16)$$

nennt man die **Norm** des Vektors  $x \in \mathbb{R}^n$ ; sie hat folgende Eigenschaften:

**N.1.**  $|x| = 0$  dann und nur dann, wenn  $x = 0$ .

**N.2.**  $|\lambda x| = |\lambda| |x|$ , wobei  $\lambda \in \mathbb{R}$ . (1.17)

**N.3.**  $|x + y| \leq |x| + |y|$  für  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

Es gilt die **Cauchy Ungleichung**

$$|(x, y)| \leq |x| |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad (1.18)$$

wie leicht nachzuweisen ist. Folglich ist der Winkel  $\theta \in [0, 2\pi)$  zwischen den Vektoren  $x, y \in \mathbb{R}^n$  durch die Gleichung

$$\cos \theta := \frac{(x, y)}{|x| |y|} \leq 1 \quad (1.19)$$

wohldefiniert und wir erhalten:

$$x \cdot y = (x, y) = |x| |y| \cos \theta . \quad (1.20)$$

**Definition 1.17** Eine stetige lineare Abbildung

$$\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega(\lambda x + \mu y) = \lambda \omega(x) + \mu \omega(y), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n \quad (1.21)$$

heißt **Funktional**.

Charakteristisch für lineare Funktionale (und für lineare Operatoren allgemein) ist die folgende: *Das Funktional (1.21) ist dann und nur dann stetig, wenn es beschränkt ist:*

$$|\omega| := \sup_{|x|=1} |\omega(x)| < \infty . \quad (1.22)$$

Der folgende Satz ist eine schwache Form des Riesz Theorems. Er gilt für den allgemeinen Hilbert Raum.

**Satz 1.18** *Es existiert zu jedem Funktional  $\omega$  genau ein Vektor in  $\mathbb{R}^n$ , den wir wieder mit  $\omega$  bezeichnen, so dass gilt*

$$\omega(x) = (\omega, x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.23)$$

Die Norm  $|\omega|$  des Vektors  $\omega \in \mathbb{R}^n$  stimmt mit der Norm des Funktionals (1.22) überein.

Mit anderen Worten: Der **Dualraum**  $(\mathbb{R}^n)^*$  der stetigen linearen Funktionale auf dem Euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$  ist **isometrisch isomorph** zu  $\mathbb{R}^n$ , in Zeichen  $(\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$ .

**Definition 1.19** Ein  $n$ -Tupel von Vektoren  $\{x_j\}_{j=1}^n$ ,  $x_j \in \mathbb{R}^n$  heißt **Basis** in  $\mathbb{R}^n$ , wenn jeder Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  als Summe

$$x = \sum_{j=1}^n c^j x_j \quad (1.24)$$

mit  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  darstellbar ist.

Die Basis  $\{x_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}^n$  heißt **orthonormal**, falls

$$x_j \cdot x_k = (x_j, x_k) = \delta_{jk}, \quad (1.25)$$

wobei  $\delta_{jk}$  das Kronecker'sche Symbol bezeichnet, für es gilt  $\delta_{jk} = 0$ , wenn  $j \neq k$  und  $\delta_{jj} = 1$  sonst.

Da die Darstellung

$$x = (x^1, \dots, x^n)^\top = \sum_{j=1}^n x^j e_j \quad (1.26)$$

mit

$$e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.27)$$

gilt, ist  $\{e_j\}_{j=1}^n$  eine Basis in  $\mathbb{R}^n$ . Man nennt sie die **kanonische Basis**. Die kanonische Basis ist orthonormal (vgl. (1.25))

$$e_j \cdot e_k = (e_j, e_k) = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.28)$$

Für  $\mathbb{R}^3$  besteht die kanonische Basis aus den folgenden drei Vektoren:

$$e_1 = (1, 0, 0)^\top, \quad e_2 = (0, 1, 0)^\top, \quad e_3 = (0, 0, 1)^\top. \quad (1.29)$$

Für zwei geordnete Basen  $E := \{e_j\}_{j=1}^n$  und  $F := \{f_j\}_{j=1}^n$  in  $\mathbb{R}^n$  existiert die **Matrix des Basiswechsels**

$$F = \mathcal{A}_{E,F} E, \quad \mathcal{A}_{E,F} = [a_j^k]_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

oder, in Details:

$$e_j = \sum_{k=1}^n a_k^j f_k, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.31)$$

Diese Matrix ist nicht degeneriert (also elliptisch), das heißt es gilt  $\det \mathcal{A}_{E,F} \neq 0$ , weil  $E$  und  $F$  nach Vereinbarung Basen und desto linear unabhängig sind.

**Definition 1.20** Zwei geordnete Basen  $E := \{e_j\}_{j=1}^n$  und  $F := \{f_j\}_{j=1}^n$  in  $\mathbb{R}^n$  bestimmen dieselbe Orientierung von  $\mathbb{R}^n$ , in Zeichen  $E \sim F$ , wenn gilt

$$\det \mathcal{A}_{E,F} > 0.$$

Offenbar ist “ $\sim$ ” eine Äquivalenzrelation auf der Menge der geordneten Basen von  $\mathbb{R}^n$ , und es gibt genau zwei Äquivalenzklassen. Jede dieser Äquivalenzklassen bestimmt eine der beiden möglichen Orientierungen von  $\mathbb{R}^n$ .

Von der Orientierung des  $\mathbb{R}^n$  spricht man also nur im Zusammenhang mit einer gewählten Basis.

**Definition 1.21** Betrachte jetzt  $\mathbb{R}^n$  mit der kanonischen Basis  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ . Standardmäßig wird vereinbart, dass  $\mathbb{R}^n$  durch  $E$  **positiv orientiert** ist (vgl. Fig 1.22).

Falls  $\mathbb{R}^n$  durch der Basis  $E = \{e_1, \dots, e_j, \dots, e_k, \dots, e_n\}$  positiv orientiert ist und  $j \neq k$ , erhält  $\mathbb{R}^n$  durch der Permutierte Basis  $E' := \{e_1, \dots, e_k, \dots, e_j, \dots, e_n\}$  eine **negative Orientierung** (vgl. Übung 1.1).

## 1.6 BILINEARE UND QUADRATISCHE FORMEN

**Definition 1.22** Es sei  $T$  ein reeller Vektorraum. Eine **Bilinearform** auf  $T$  ist eine Abbildung  $\beta : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned} \beta(aU + bV, W) &= a\beta(U, W) + b\beta(V, W), \\ \beta(U, aW + bV) &= a\beta(U, W) + b\beta(U, V) \end{aligned} \quad (1.32)$$

für alle  $U, V, W \in T$  und beliebigen  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Die Bilinearform  $\beta(U, V)$  heißt **symmetrisch**, falls folgende Gleichung gilt:

$$\beta(U, V) = \beta(V, U) \quad \forall U, V \in T. \quad (1.33)$$

Die zu  $\beta(U, V)$  **assoziierte quadratische Form**  $\beta(U, U)$  bezeichnet man auch wieder mit  $\beta(U) = \beta(U, U)$ .

Man nennt  $\beta$  **positiv definit**, wenn gilt

$$0 \neq U \in T \quad \text{impliziert} \quad \beta(U) = \beta(U, U) > 0.$$

**Beispiel 1.23** Auf  $\mathbb{R}^n$  ist das Euklidische Skalarprodukt eine symmetrische Bilinearform

$$\beta(X, Y) := X \cdot Y = \sum_{j=1}^n x_j y_j, \quad X = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n, \quad Y = (y_1, \dots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$$

und die assoziierte quadratische Form ist positiv definit weil  $\beta(X, X) = |X|^2 > 0$  für beliebige  $\mathbb{R}^n \ni X \neq 0$ .

**Beispiel 1.24** Ist  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $A = [a_{jk}]_{n \times n}$ , ein linearer Operator, so ist

$$\beta_A(X, Y) := AX \cdot Y = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k y_j \quad (1.34)$$

eine bilineare Form. Ist der Operator  $A$  symmetrisch

$$A = A^\top \quad \text{d.h.,} \quad a_{jk} = a_{kj}, \quad j, k = 1, \dots, n, \quad (1.35)$$

so ist die assoziierte quadratische Form auch symmetrisch

$$\beta_A(X, Y) := AX \cdot Y = X \cdot AY = AY \cdot X = \beta_A(Y, X). \quad (1.36)$$

**Lemma 1.25** Es sei  $\beta : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$  eine Bilinearform auf dem Vektorraum  $T$ . Weiterhin bezeichne  $\{e_j\}_{j=1}^n$  eine fixierte Basis von  $T$ .

Dann existiert ein linearer Operator  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $G = [g_{jk}]_{n \times n}$ , wobei  $g_{jk} = \beta(e_j, e_k)$ , so dass gilt

$$\beta(U, V) = GU \cdot V = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n g_{jk} u^k v^j, \quad (1.37)$$

wobei  $U = \sum_{j=1}^n u^j e_j$ ,  $V = \sum_{j=1}^n v^j e_j$ .

Insbesondere ist  $G$  symmetrisch  $g_{jk} = g_{kj}$ , wenn  $\beta$  symmetrisch ist.

**Beweis:** Durch Einsetzen von  $U = \sum_{j=1}^n u^j e_j$  und  $V = \sum_{j=1}^n v^j e_j$  in  $\beta(U, V)$  wegen der Bilinearität von  $\beta(U, V)$  folgt die Darstellung (1.37) mit  $g_{jk} = \beta(e_j, e_k)$  unmittelbar.

Falls  $\beta(U, V)$  symmetrisch ist, ist die Symmetrie von die Matrix des Basiswechsels  $g_{jk} = g_{kj}$  auch offensichtlich:  $g_{jk} = \beta(e_j, e_k) = \beta(e_k, e_j) = g_{kj}$ . ■

Was passiert mit der Bilinearform beim Basiswechsel?

Dazu seien  $E := \{e_j\}_{j=1}^n$  und  $F := \{f_j\}_{j=1}^n$  zwei geordnete Basen von  $T$  und  $\mathcal{A}_{E,F} = [a_j^k]_{n \times n}$  sei die Matrix des Basiswechsels (vgl. (1.30)). Ist dann  $B = [b_{jk}]_{n \times n}$  mit  $b_{jk} := \beta(f_k, f_j)$  die Fundamentalmatrix der Bilinearform  $\beta$  bezüglich  $F := \{f_j\}_{j=1}^n$  und ist  $G =$

$[g_{jk}]_{n \times n}$  mit  $g_{jk} := \beta(e_k, e_j)$  die Fundamentalmatrix der Bilinearform  $\beta$  bezüglich  $E := \{e_j\}_{j=1}^n$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} b_{jk} &= \beta(f_j, f_k) = \beta\left(\sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell^j e_\ell, \sum_{m=1}^n \alpha_m^k e_m\right) \\ &= \sum_{\ell, m=1}^n \alpha_\ell^j \alpha_m^k \beta(e_\ell, e_m) = \sum_{\ell, m=1}^n g_{\ell m} \alpha_j^\ell \alpha_k^m. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: es gilt

$$B = \mathcal{A}_{E,F} G \mathcal{A}_{E,F}^\top \quad (1.38)$$

und, falls die Bilinearform  $\beta$  symmetrisch ist, ist  $B$  auch symmetrisch:

$$B^\top = [\mathcal{A}_{E,F} G \mathcal{A}_{E,F}^\top]^\top = [\mathcal{A}_{E,F}^\top]^\top G^\top \mathcal{A}_{E,F} = \mathcal{A}_{E,F} G \mathcal{A}_{E,F}^\top = B. \quad (1.39)$$

Es seien nun zwei Vektorräume  $S$  und  $T$  gegeben, sowie eine lineare Abbildung  $L : S \rightarrow T$ .  $\beta_T$  sei eine symmetrische Bilinearform auf  $T$ . Diese liefert eine symmetrische Bilinearform  $\beta_S$  auf  $S$  mittels

$$\beta_S(U, V) := \beta_T(LU, LV).$$

Man nennt  $\beta_S$  die durch  $L$  von  $\beta_T$  **induzierte Bilinearform**. Ist  $L$  injektiv und  $\beta_T$  positiv definit, so ist auch  $\beta_S$  positiv definit:

$$0 \neq U \in S \quad \implies \quad 0 \neq LU, \quad \beta_S(U, U) = \beta_T(LU, LU) > 0. \quad (1.40)$$

## 1.7 VEKTORPRODUKT IN $\mathbb{R}^n$

**Definition 1.26 Vektorprodukt (oder auch Kreuzprodukt)** Für  $u, v \in \mathbb{R}^3$  sei der eindeutig bestimmte Vektor  $u \times v \in \mathbb{R}^3$ , der durch die folgende Eigenschaft charakterisiert ist:

$$(u \times v) \cdot w = \det[u, v, w] := \det \begin{bmatrix} u^1 & v^1 & w^1 \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{bmatrix} \quad \text{für alle } w \in \mathbb{R}^3. \quad (1.41)$$

Dabei sind die Vektoren  $u, v, w$  bezüglich der kanonischen Basis dargestellt, also

$$u = \sum_{j=1}^3 u^j e_j, \quad v = \sum_{j=1}^3 v^j e_j, \quad w = \sum_{j=1}^3 w^j e_j. \quad (1.42)$$

Oft schreibt man auch

$$u \wedge v \quad \text{statt} \quad u \times v. \quad (1.43)$$

Wenden wir die Cramersche Regel auf (1.41) an, so folgt

$$\begin{aligned}
 u \times v &= \det \begin{bmatrix} u^2 & v^2 \\ u^3 & v^3 \end{bmatrix} e_1 - \det \begin{bmatrix} u^1 & v^1 \\ u^3 & v^3 \end{bmatrix} e_2 + \det \begin{bmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{bmatrix} e_3 \\
 &= \left( \det \begin{bmatrix} u^2 & v^2 \\ u^3 & v^3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} u^1 & v^1 \\ u^3 & v^3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{bmatrix} \right)^\top \\
 &= \left( \sum_{j,k=1}^3 \sigma(1, j, k) u_j v_k, \sum_{j,k=1}^3 \sigma(2, j, k) u_j v_k, \sum_{j,k=1}^3 \sigma(3, j, k) u_j v_k \right)^\top, \quad (1.44)
 \end{aligned}$$

wobei entweder  $\sigma(i, j, k) = 1$  oder  $\sigma(i, j, k) = -1$ , je nachdem, ob  $(i, j, k)$  eine gerade oder ungerade Permutation von  $(1, 2, 3)$  darstellt.

Für die Spezielle Wahl  $e_1, e_2, e_3$  (siehe (1.27)), erhalten wir aus (1.44) die folgenden Regeln:

$$\begin{aligned}
 e_1 \times e_2 &= e_3, & e_1 \times e_3 &= -e_2, & e_2 \times e_3 &= e_1, \\
 e_2 \times e_1 &= -e_3, & e_3 \times e_1 &= e_2, & e_3 \times e_2 &= -e_1.
 \end{aligned} \quad (1.45)$$

Die Eigenschaften der Determinante implizieren folgende Eigenschaften des Vektorproduktes:

**V.1. Bilinearität :**

$$u \times (cv + dw) = cu \times v + du \times w, \quad \text{und} \quad (cu + dw) \times v = cu \times v + dw \times v$$

für beliebige Vektoren  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$  und beliebige Konstanten  $c, d \in \mathbb{R}$ .

(1.46)

**V.2. Antikommutativität :**  $u \times v = -v \times u$ .

**V.3.**  $u \times v = 0 \iff u, v$  sind linear abhängig.

**V.4. Orthogonalität :**  $(u \times v) \cdot u = (u \times v) \cdot v = 0$ .

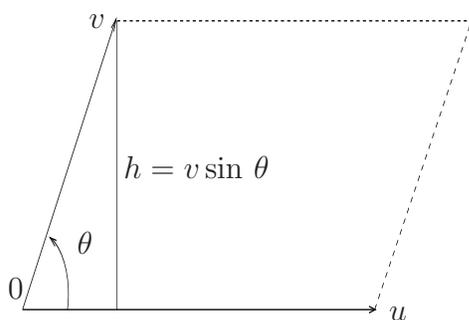
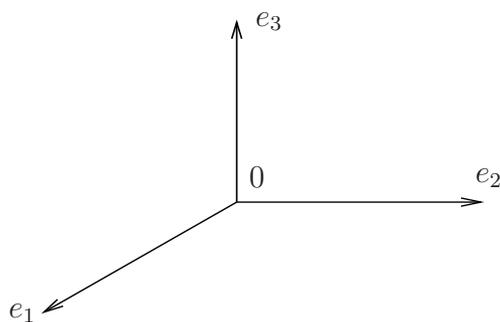


Fig. 1.21



Positiv orientierte Basis  $\{e_1, e_2, e_3\}$

Fig. 1.22

**Lemma 1.27** *Es sei  $x, y, u, v \in \mathbb{R}^3$ ,  $c, d \in \mathbb{R}$ .*

i. *Angenommen die Vektoren  $u$  und  $v$  sind linear unabhängig, bildet das System  $\{u, v, u \times v\}$  eine positiv orientierte Basis in  $\mathbb{R}^3$ .*

ii.  $(u \times v, x \times y) = (u \times v) \cdot (x \times y) = \det \begin{bmatrix} u \cdot x & v \cdot x \\ u \cdot y & v \cdot y \end{bmatrix}.$

iii.  $|u \times v| = |u||v| \sin \theta = A_{u,v}$ , wobei  $\theta$  den Winkel zwischen  $u$  und  $v$  (vgl. (1.19)) und  $A_{u,v}$  den Flächeninhalt des von  $u, v$  aufgespannten Parallelogramms bezeichnet (vgl. Fig. 1.21).

iv. *Das Vektorprodukt ist im Allgemeinen nicht assoziativ:  $(u \times v) \times w \neq u \times (v \times w)$  für gewisse  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ .*

v. *Für zwei Raumkurven, also zwei Abbildungen*

$$\alpha_j = (\alpha_j^1, \alpha_j^2, \alpha_j^3)^\top : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \alpha_j \in \mathbb{C}^1(I), \quad j = 1, 2$$

eines offenen Intervalls  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}^3$  (vgl. Definition 2.1 in § 2.1), gilt die Produktregel

$$\frac{d}{dt} [\alpha_1(t) \times \alpha_2(t)] = \alpha_1'(t) \times \alpha_2(t) + \alpha_1(t) \times \alpha_2'(t). \quad (1.47)$$

vi. *Falls drei Vektoren  $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$  als lineare Kombinationen der Vektoren  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$  dargestellt sind*

$$u_j = \sum_{k=1}^3 a_{jk} v_k, \quad A := [a_{jk}]_{3 \times 3},$$

so gilt

$$u_1 \times u_2 \times u_3 = \det A (v_1 \times v_2 \times v_3). \quad (1.48)$$

vii.  *$u \times v$  ist orthogonal zu derjenigen Ebene, die von linear unabhängige Vektoren  $u$  und  $v$  aufgespannt wird.*

**Beweis.** (i.) Falls  $u, v$  linear unabhängig sind,

$$(u \times v)(u \times v) = |u \times v|^2 > 0$$

(vgl. V.3) und, gemäß Definition (1.41),

$$0 < |u \times v|^2 = (u \times v, u \times v) = \det [u, v, u \times v].$$

Damit ist  $\{u, v, u \times v\}$  eine positiv orientierte Basis (vgl. Definition 1.21).

(ii.) Wegen der Bilinearität des Vektorprodukts reicht es aus, die Identität für die kanonische Basis zu überprüfen. Für die Basisvektoren  $e_1, e_2, e_3$  folgt der Beweis unmittelbar mit Hilfe der Gleichungen (1.28) und (1.45).

(iii.) Aus (ii.) und (1.20) folgt (siehe Fig. 1.21):

$$\begin{aligned} |u \times v|^2 &= \det \begin{bmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ u \cdot v & v \cdot v \end{bmatrix} = |u|^2 |v|^2 - u \cdot v \\ &= |u|^2 |v|^2 (1 - \cos^2 \theta) = |u|^2 |v|^2 \sin^2 \theta = A_{u,v}^2. \end{aligned} \quad (1.49)$$

(iv.) Aus (1.45) folgt

$$(e_1 \times e_3) \times e_3 = -e_2 \times e_3 = -e_1,$$

aber

$$e_1 \times (e_3 \times e_3) = e_1 \times 0 = 0$$

und damit  $(e_1 \times e_3) \times e_3 \neq e_1 \times (e_3 \times e_3)$ .

(v.) Ist offenbar.

(vi.) Wegen der Bilinearität des Kreuzproduktes gilt

$$\begin{aligned} u_1 \times u_2 \times u_3 &= \sum_{j=1}^3 a_{1j} v_j \times \sum_{k=1}^3 a_{2k} v_k \times \sum_{m=1}^3 a_{3m} v_m \\ &= \sum_{j,k,m=1}^3 a_{1j} a_{2k} a_{3m} (v_j \times v_k \times v_m). \end{aligned}$$

Andererseits folgt aus der Antikommutativitätseigenschaft V.2  $v_j \times v_k = -v_k \times v_j$  und, allgemein,

$$v_j \times v_k \times v_m = \sigma(j, k, m) v_1 \times v_2 \times v_3$$

wobei das Vorzeichen  $\sigma(j, k, m) = \pm 1$  in (1.44) definiert ist.

Daraus folgt:

$$u_1 \times u_2 \times u_3 = \sum_{j,k,m=1}^3 \sigma(j, k, m) a_{1j} a_{2k} a_{3m} (v_1 \times v_2 \times v_3) = \det A (v_1 \times v_2 \times v_3).$$

(vii.) Folgt unmittelbar aus Eigenschaft V.5 in (1.46). ■

## 1.8 HILFSMATERIAL

In diesem Abschnitt werden wir einige Hilfssätze formulieren die später verwendet werden.

## A. Differenzierbarkeit

**Definition 1.28** *Eine stetige Abbildung*

$$F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^k \quad (1.50)$$

heißt **differenzierbar**, wenn die Gleichung

$$F(x+h) = F(x) + J_x F(x) \cdot h + o(|h|) \quad (1.51)$$

für gewisse lineare Abbildungen  $J_x F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  und beliebige Vektoren  $x, x+h \in \Omega$ ,  $h \in \mathbb{R}^k$  gilt.

Die Notation  $R(h) = o(h^k)$  bedeutet, dass  $\lim_{h \rightarrow 0} h^{-k} R(h) = 0$ .

Die lineare Abbildung

$$J_x F(x) = \left[ \frac{\partial F_l}{\partial x_j} \right]_{m \times k} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (1.52)$$

heißt **Jakobi Matrix**, ihre Determinante **Jacobian** von  $F$ . Der Rang der Jakobi Matrix  $J_x F$  heißt der **Rang der Abbildung**  $F$ . Hat  $F$  maximalen Rang, so ist (1.50) **injektiv** falls  $k \leq m$  und **surjektiv** falls  $k \geq m$ .

Für eine skalare Funktion  $F \in C^1$ , die von mehreren Veränderlichen abhängt, ist die Jakobi Matrix von der Größe  $1 \times k$

$$J_x F(x) = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_k} \right)^\top = \nabla F, \quad (1.53)$$

das heißt die Matrix ist in diesem Fall ein Vektor, der **Gradient** von  $F$ .

## B. Satz über implizite Funktion

Die Funktion heißt **implizit** gegeben, wenn sie durch die Gleichung

$$F(x, y) = 0, \quad x \in U_1 \subset \mathbb{R}^k, \quad y \in U_2 \subset \mathbb{R}^m \quad (1.54)$$

gegeben ist. Der Satz über implizite Funktion beleuchtet folgendes Problem: Unten welchen Bedingung existiert die Funktion  $y = f(x)$  (oder  $x = g(y)$ ), so dass die Gleichung  $F(x, f(x)) \equiv 0$  für alle  $x \in V_1 \subset U_1$  erfüllt ist (oder die entsprechende Gleichung  $F(g(y), y) \equiv 0$  für alle  $y \in V_2 \subset U_2$  gilt).

**Satz 1.29 (Über implizite Funktion).** *Es sei  $U_1 \subset \mathbb{R}^k$ ,  $U_2 \subset \mathbb{R}^m$  und die Abbildung*

$$F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (1.55)$$

stetig differenzierbar  $F \in C^1(U_1 \times U_2)$ . Wenn  $F(x_0, y_0) = 0$  für das gegebene Paar  $x_0 \in U_1$ ,  $y_0 \in U_2$  erfüllt ist und die quadratische Matrix  $\frac{\partial F(x_0, \cdot)}{\partial y} \Big|_{y=y_0} = \left[ \frac{\partial F_l(x_0, \cdot)}{\partial y_j} \Big|_{y=y_0} \right]_{m \times m}$  invertierbar ist, dann existiert eine Umgebung  $V_1 \subset U_1$  von  $x_0$  und eine Abbildung

$$g : V_1 \rightarrow U_2 \quad (1.56)$$

mit der Eigenschaft  $F(x, g(x)) \equiv 0$  für alle  $x \in V_1$ . ■

Wir haben nur den Spezialfall  $\dim U_2 = m$  betrachtet, denn dieser reicht für unsere Anwendungen aus.

Außerdem haben wir den Satz nur lokal formuliert (beachte die Einschränkung „Umgebung von  $x_0$ “). Die globale Situation ist viel schwieriger zu beschreiben (betrachte das Beispiel  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ) und wird in dieser Vorlesung nicht betrachtet.

**Korollar 1.30 (Über Umkehrabbildung).** Sei  $V \subset \mathbb{R}^m$  und die Abbildung

$$f : V \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (1.57)$$

stetig differenzierbar  $f \in C^1(V)$ . Wenn die Jakobi Matrix von  $f$  nicht entartet ist (also wenn sie invertierbar ist)

$$\det J_x f(x_0) \neq 0, \quad x_0 \in U,$$

dann existiert eine Umgebung  $U \subset V$  von  $x_0$ , in der die Funktion  $f : U \rightarrow W = f(U)$  einen Diffeomorphismus darstellt. Anders formuliert: es existiert die inverse Abbildung  $f^{-1} : W \rightarrow U$ ,  $f(f^{-1}(y)) \equiv y$  für alle  $y \in W$ , diese ist auch stetig differenzierbar, also  $f^{-1} \in C^1(W)$ . ■

**Beweis:** Betrachte die Funktion

$$F(x, y) := y - f(x), \quad F : Z \times V \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad Z := f(V) \subset \mathbb{R}^m.$$

Weil der entsprechende Jakobian

$$\frac{\partial F(\cdot, y_0)}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = \left[ \frac{\partial F_l(\cdot, y_0)}{\partial x_j} \Big|_{x=x_0} \right]_{m \times m} = J_x f(x_0) \neq 0, \quad y_0 := f(x_0),$$

nicht entartet ist, existiert nach Satz 1.29 die implizite Funktion  $x = f^{-1}(y)$ ,  $f^{-1} : W \rightarrow U$ , mit der Eigenschaft:  $F(f^{-1}(y), y) = y - f(f^{-1}(y)) \equiv 0$ . ■

### C. Gewöhnliche Differentialgleichung

Es seien  $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n+1}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , dann heißt:

$$f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad (1.58)$$

eine **gewöhnliche Differentialgleichung**  $n$ -ter Ordnung.

Ihre Lösungen sind  $n$ -mal differenzierbare Funktionen, die von einer Variablen abhängen und die DGL auf einem zu bestimmenden Intervall  $I$  erfüllen.

Kann die Differentialgleichung nach der höchsten vorkommenden Ableitung aufgelöst werden und hat somit die Form:

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1.59)$$

(siehe Satz 1.29) so heißt sie **explizit**, andernfalls **implizit**.

Die Lösung einer Differentialgleichung ist immer eine Funktion (oder im Falle eines Systems von Differentialgleichungen mehrere Funktionen). Es ist jedoch nicht jede Differentialgleichung lösbar, es gibt allerdings einige Kriterien, anhand derer man Lösbarkeit erkennen kann. Ferner reicht die Differentialgleichung allein im Allgemeinen nicht aus, um die Funktion eindeutig zu bestimmen. Die allgemeine Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung hat im Allgemeinen  $n$  freie Parameter.

Beispielsweise werden alle schwingenden Pendel durch eine Differentialgleichung beschrieben, und der generelle Bewegungsablauf folgt immer dem gleichen Prinzip. Der konkrete Bewegungsablauf ist jedoch durch die Rand- oder Anfangsbedingung(en) (wann wurde das Pendel angestoßen, und wie weit) bestimmt. Die Lösbarkeit von Anfangswertproblemen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung wird durch den Satz von **Picard-Lindelöf** beschrieben. Nur wenige Typen von Differentialgleichungen lassen sich analytisch lösen. Insbesondere können partielle Differentialgleichungen oft nur mit numerischen Methoden approximiert werden.

Gegeben sei eine Differentialgleichung  $y'(x) = F(x, y(x))$  auf einem Intervall  $[a, b]$ . Gesucht sind stetig differenzierbare Funktionen  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , welche die aus dieser Gleichung folgenden Bedingungen an Funktionswert und Wert der Ableitung in jedem Punkt  $x$  aus  $[a, b]$  erfüllen.

**Satz 1.31 (Picard-Lindelöf).** *Es sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  und  $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Funktion, welche eine Lipschitz-Bedingung bzgl.  $y$  erfüllt. Diese besagt: Es gibt eine Konstante  $L > 0$ , so dass für jedes  $x \in [a, b]$  die Ungleichung gilt:*

$$\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n : |F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|. \quad (1.60)$$

*Dann gibt es zu jedem  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  eine differenzierbare Funktion  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , welche das Anfangswertproblem*

$$y(a) = y_0 \quad \text{und} \quad \forall x \in (a, b) : y'(x) = F(x, y(x)) \quad (1.61)$$

*eindeutig löst.* ■

## ÜBUNGEN

**Übung 1.1** Vorausgesetzt  $\mathbb{R}^n$  ist durch der Basis  $E = \{e_1, \dots, e_j, \dots, e_k, \dots, e_n\}$  positiv orientiert,  $j \neq k$ , und betrachte der Permutierte Basis  $E' := \{e_1, \dots, e_k, \dots, e_j, \dots, e_n\}$ . Finden Sie die Matrix des Basiswechsels und beweisen Sie das durch  $E'$  ist  $\mathbb{R}^n$  **negativ Orientiert**.

**Übung 1.2** Betrachten Sie zu  $a > 0$  und  $b \neq 0$  die Kurve

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \alpha(t) = (ae^t, ae^{-t}, bt).$$

- Skizzieren Sie die Projektionen dieser Kurve auf die  $(x^1, x^2)$ ,  $(x^1, x^3)$  und die  $(x^2, x^3)$  Ebene.
- Skizzieren Sie die Projektionen der Helix  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\beta(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$  (siehe Beispiel 1.14) auf diese Ebenen und vergleichen Sie.

**Übung 1.3** Wie im § 1.3 erwähnt, ist eine **Zykloide** die Bahnkurve eines Punktes, der starr mit einem Kreis vom Radius  $r > 0$  verbunden ist und auf einer Gerade (z.B.  $\text{suf } \mathbb{R}$ ) abrollt.

- Zeigen Sie, dass die Zykloide die Spur der parametrisierten Kurve  $\alpha(\vartheta) = r(\vartheta - \sin \vartheta, 1 - \cos \vartheta) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$  ist, und bestimmen Sie die singulären Punkte von  $\alpha$ .
- Berechnen Sie die Bogenlänge der Zykloide, die einer vollständigen Rotation der Kreisscheibe entspricht.

**Übung 1.4** Zeigen Sie:

- $a \wedge (b \wedge c) + b \wedge (c \wedge a) + c \wedge (a \wedge b) = 0$  (Jacobi-Identität)
- $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c \Leftrightarrow a(b \cdot c) = (a \cdot b)c$   
Insbesondere ist  $a \wedge (b \wedge a) = (a \wedge b) \wedge a$  für alle  $a, b \in \mathbb{R}^3$ .
- $(u \wedge v) \cdot (w \wedge z) = u \cdot [v \wedge (w \wedge z)] = (u \cdot w)(v \cdot z) - (u \cdot z)(v \cdot w)$
- $(u \wedge v) \wedge (w \wedge z) = [(u \wedge v) \cdot z]w - [(u \wedge v) \cdot w]z$
- $u \wedge v \neq 0 \Rightarrow \{u, u \wedge v, u \wedge (u \wedge v)\}$  ist ein positiv orientiertes Orthogonalsystem.
- $(u \wedge v) \cdot w \neq 0 \Rightarrow \{(v \wedge w), (w \wedge u), (u \wedge v)\}$  ist positiv orientiert.

**Übung 1.5** Zeigen Sie: das Vektorprodukt  $u \times v$  von Einheitsvektoren  $u, v \in \mathbb{R}^3$ ,  $|u| = |v| = 1$ , die orthogonal sind  $u \cdot v = 0$ , ist ein Einheitsvektor wieder  $|u \times v| = 1$ .

**Übung 1.6** Zeigen Sie, dass für die Traktrix gilt  $\alpha : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  (siehe Beispiel 1.7):

- Sie ist eine differenzierbare parametrisierte Kurve, die außer an der Stelle  $t = \pi/2$  regulär ist (i.e.,  $\alpha'(t) \neq 0$ ).
- Die Länge des Segments der Tangente der Traktrix zwischen ihrem Berührungspunkt  $\alpha(t)$  und der  $y$ -achse ist konstant 1.
- Beweisen Sie, dass die Formeln (1.2) mit  $a = 1$  und (1.1) die gleiche Kurve darstellen.

## 2 KURVENTHEORIE

### 2.1 GRUNDLEGENDE BEGRIFFE

#### Definition 2.1 Die Abbildung

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^\top : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

eines offenen, oder halb offenen Intervalls in  $\mathbb{R}^n$   $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ , oder  $I = [a, b) \subset \mathbb{R}$ , nennt man **parametrisierte Kurve**, wenn die teilnehmenden Funktionen  $\alpha_j : I \rightarrow \mathbb{R}$  mindestens einmal differenzierbar sind für alle  $j = 1, \dots, n$ .

Die **Spur** von  $\alpha$  nennt man die Menge  $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^n$ .

**Warnung:** Verschiedene Kurven können dieselbe Spur haben (vgl. Beispiel 1.6)!

Die Kurve ist  $m$ -glatt (oder gehört zu Klasse  $C^m$ ), wenn alle teilnehmenden Funktionen  $m$ -mal stetig differenzierbar sind. Kurven der Klasse  $C^\infty$  nennt man auch glatte Kurven.

Meistens reicht es Kurven der Klasse  $C^2$  zu betrachten.

Kurven, die implizit gegeben sind, also als Lösung des Systems

$$F_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

wobei  $F_1, \dots, F_{n-1}$   $C^1$ -glatte Funktionen sind, nennt man **Implizite Kurven**. Bedingungen, unter denen die implizite Kurve explizit darstellbar sind, liefert der Satz über implizite Funktion 1.29.

**Satz 2.2** Die vektorwertige Funktion  $F = (F_1, \dots, F_{n-1})^\top$  sei stetig differenzierbar, also  $F_j \in C^1(\Omega)$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ , und die entsprechende Jakobimatrix habe maximalen Rang im Punkt  $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$ . Das heißt:

$$\det J_{\bar{x}} F(x_0) \neq 0 \quad (2.2)$$

für die Teilvariabel  $\bar{x} := (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

Dann existiert ein Intervall  $I_k = [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}$  um  $x_k^0$  (also eine Umgebung von  $x_k^0$ ) und Abbildungen

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n : I \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.3)$$

mit der Eigenschaft

$$F(\alpha(t)) \equiv 0 \quad \text{für alle } t \in I_k,$$

wobei

$$\alpha(t) := (\alpha_1(t), \dots, \alpha_{k-1}(t), t, \alpha_{k+1}(t), \dots, \alpha_n(t))^\top. \quad (2.4)$$

Die Abbildung

$$\alpha : I_k \rightarrow \mathbb{R}^n$$

( $\alpha(t)$  aus (2.3)) ist die gesuchte **lokale Parametrisierung** der impliziten Kurve aus (2.1).

Wenn die Bedingung (2.2) global erfüllt ist, ist (2.3) eine **globale Parametrisierung**.

Also definiert die skalare Funktion  $F$  im Falle  $n = 2$  eine ebene Kurve, vorausgesetzt ihr Gradient ist nicht entartet  $J_x F(x) = \nabla F(x) \neq 0$  für alle  $x \in U$ .

Für den Fall  $n = 3$  definiert das Funktionenpaar  $F = (F_1, F_2)^\top$  eine Raumkurve, vorausgesetzt die  $2 \times 3$  Jakobi Matrix  $J_x F(x)$  hat Rang 2 für alle  $x \in U$ .

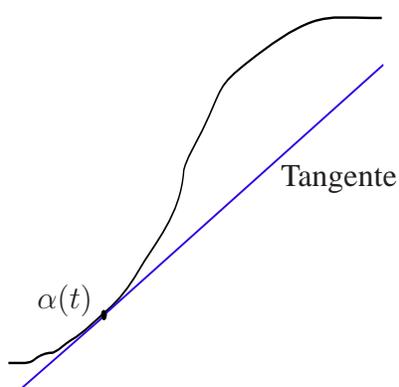


Fig. 2.1

**Definition 2.3** Ist  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))^\top$ , so nennt man  $\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \dots, \alpha'_n(t))^\top$  den **Tangentenvektor** oder **Geschwindigkeitsvektor** der Kurve  $\alpha$  an der Stelle  $t$ .

Ist  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Kurve,  $t \in I$  mit  $\alpha'(t) \neq 0$ , so gibt es genau eine Gerade durch  $\alpha(t)$ , die zu  $\alpha'(t)$  parallel ist, die **Tangente**:

$$\{\alpha(t) + s\alpha'(t) : s \in \mathbb{R}\}.$$

Ist  $t \in I$  und  $\alpha'(t) = 0$ , so nennt man  $t$  einen **singulären Punkt** von  $\alpha$ .

**Definition 2.4** Eine Kurve  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **regulär**, falls  $\alpha'(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$ , d.h. falls  $\alpha$  keine singulären Punkte hat.

**Bemerkung 2.5** In regulären Punkten sieht die Kurve lokal aus wie die Tangente.

**Beispiel 2.6** Neil'sche Parabel:  $\alpha(t) = (t^2, t^3)^\top$ . Der Punkt  $t = 0$  ist singulär:  $\alpha'(0) = (0, 0)^\top$  (vgl. Fig. 2.3).

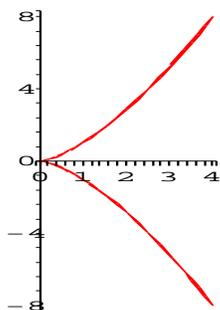
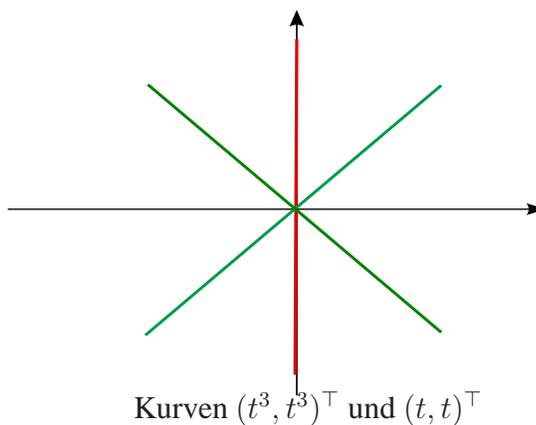
Neil'sche Parabel:  $y^2 - x^3 = 0$ Kurven  $(t^3, t^3)^\top$  und  $(t, t)^\top$ 

Fig. 2.2

**Beispiel 2.7** Ungünstige Parametrisierung:  $\alpha(t) = (t^3, t^3)^\top$  hat eine Singularität  $\alpha'(0) = (0, 0)^\top$ . Aber die Kurve  $\beta(t) = (t, t)^\top$  hat die gleiche Spur und ist überall regulär:  $\beta'(t) \equiv (1, 1)^\top \neq 0$ .

**WIR VEREINBAREN:** Im folgenden betrachten wir nur **reguläre Kurven**.

Es sei  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine reguläre Kurve und  $t_0 \in I$ . Dann heißt die Funktion  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch das Integral

$$s(t) := \int_{t_0}^t |\alpha'(\tau)| d\tau \quad (2.5)$$

definiert ist, die **Bogenlänge** von  $\alpha$  bzgl.  $t_0$ . Die Bogenlänge  $s(t)$  misst die Länge des Weges, den der Punkt  $\alpha(\tau)$  zurücklegt, wenn  $\tau$  von  $t_0$  nach  $t$  wandert.

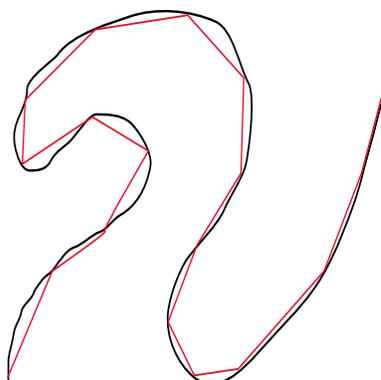


Fig. 2.3

Eine Approximation mit Polygonzügen zeigt, dass diese Definition mit der geometrischen Vorstellung von Länge verträglich ist:

$$L(\alpha|_{[t_0, t]}) := \sup \left\{ \sum_{j=1}^k |\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})| \right. \\ \left. : t_0 < t_1 < \dots < t_k = t \text{ Zerlegung von } [t_0, t] \right\}.$$

Wegen der Dreiecksungleichung wird eine solche Summe bei Verfeinerung einer Zerlegung nicht kleiner, deshalb "sup".

Angenommen  $\alpha \in C^2$ , dann ist offenbar  $s \in C^1$  mit  $s'(t) = |\alpha'(t)| > 0$  (Regularität), so dass  $s$  eine Umkehrfunktion  $\varphi = \varphi(s) \in C^1$  besitzt (vgl. Korollar 1.30). Dann gilt  $s(\varphi(t)) \equiv t$  und  $s'(\varphi(t))\varphi'(t) = 1$ . Für  $\beta(s) := \alpha(\varphi(s))$  leiten wir ab:

$$\beta'(s) = \alpha'(\varphi(s))\varphi'(s) = \frac{\alpha'(\varphi(s))}{s'(\varphi(s))} = \frac{\alpha'(\varphi(s))}{|\alpha'(\varphi(s))|},$$

da  $s'(t) = |\alpha'(t)|$ , wegen (2.5). D.h.  $|\beta'(s)| = 1$ . Damit haben wir die Kurve  $\alpha$  auf die **Bogenlänge umparametrisiert**, mit anderen Worten die Komposition  $\beta = \alpha \circ \varphi$  ist **nach Bogenlänge parametrisiert**.

**Korollar 2.8** . Jede reguläre Kurve  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in C^1(I)$  kann nach Bogenlänge parametrisiert werden: Ist  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  und  $s(t)$  die Bogenlänge von  $\alpha$  bzgl.  $a$  für  $t \in [a, b]$ , so existiert eine Umkehrfunktion  $\varphi : [0, L] \rightarrow I$  zu  $s$ , wobei  $L = L(\alpha|_{[a, b]})$  die Kurvenlänge bezeichnet, und  $\beta := \alpha \circ \varphi : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $|\beta'(s)| \equiv 1$ .

**Definition 2.9** Es sei  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Kurve, und  $\varphi : J \rightarrow I$  stetig differenzierbar,  $\varphi' \neq 0$ . Dann ist  $\beta(\tau) := \alpha(\varphi(\tau))$  für  $\tau \in J$  eine **Umparametrisierung** von  $\alpha$  mit  $\text{Spur } \alpha = \text{Spur } \beta$ .

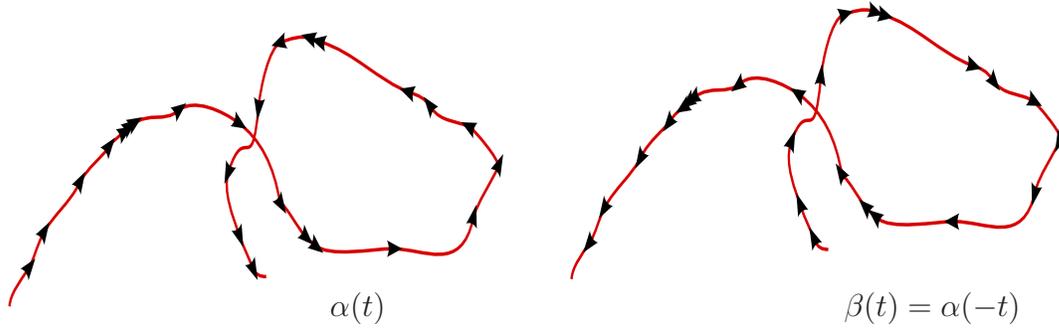


Fig. 2.4

**Beispiel 2.10**  $I = (a, b)$ ,  $J = (-b, -a)$ ,  $\varphi(\tau) := -\tau$

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \beta : J \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad \beta(\tau) = \alpha(\varphi(\tau)) = \alpha(-\tau)$$

$\alpha$  und  $\beta$  unterscheiden sich in ihrer Orientierung (siehe Fig. 2.4).

**Beispiel 2.11** Kreislinie vom Radius  $R > 0$ :

$$\alpha : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$\alpha(t) := R(\cos t, \sin t) = Re^{it}.$$

Umparametrisierung nach der Bogenlänge:

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(\tau)| d\tau = \int_0^t \sqrt{R^2 \cos^2 \tau + R^2 \sin^2 \tau} d\tau = Rt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{s}{R}.$$

Dann

$$\alpha_R(s) = \alpha\left(\frac{s}{R}\right),$$

$$\alpha_R : [0, 2\pi R) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \alpha_R(s) := R\left(\cos \frac{s}{R}, \sin \frac{s}{R}\right)^\top = Re^{is/R}. \quad (2.6)$$

oder, als periodische Funktion,

$$\alpha_R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

## 2.2 LOKALE KURVENTHEORIE IM $\mathbb{R}^3$

**Definition 2.12** Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\alpha \in C^2(I)$ , eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve; dann nennt man

$$\kappa(s) := |\alpha''(s)| = |t'(s)| \quad (2.7)$$

die **Krümmung** von  $\alpha$  in  $s$  (English: **curvature**).

**Erläuterung:** Die Krümmung beschreibt *nicht die Änderung des Tangentenvektors*, also nicht  $\alpha''(t)$ , sondern *die Änderung des Einheitstangentenvektors*. Für eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

ist die Ableitung  $\alpha'(s)$  der Einheitstangentenvektor im Punkt  $t = \alpha(s)$ .

**Beispiel 2.13** Sei  $\alpha$  eine Gerade  $\alpha(s) = su + v$  mit  $|u| = 1$  (die letzte Bedingung gewährleistet die Parametrisierung nach Bogenlänge). Daraus folgt  $\alpha'(s) = u$ ,  $\alpha''(s) \equiv 0$  und weiter  $\kappa_{\text{Gerade}} \equiv 0$ .

Ist umgekehrt  $\kappa(s) = |\alpha''(s)| \equiv 0$  für alle  $s \in I$ , so  $\alpha''(s) \equiv 0$ , dann  $\alpha'(s) \equiv u_0$ ,  $|u_0| = 1$ , und  $\alpha(s) = su_0 + v$ ,  $v \in \mathbb{R}^3$ . Also ist Spur  $\alpha$  Teil einer Geraden.

**Beispiel 2.14** Für die in umgekehrter Richtung durchlaufene Kurve  $\alpha_-(s) := \alpha(-s)$  erhält man

$$\alpha'_-(s) = -\alpha'(-s), \quad \text{also} \quad |\alpha'_-(s)| = |\alpha'(-s)| \equiv 1,$$

und

$$\beta''(s) = \alpha''(-s), \quad \text{also} \quad \kappa_{\alpha_-}(s) = \kappa_{\alpha}(-s).$$

Ist  $\kappa(s) \neq 0$ , so ist  $n(s) := \alpha''(s)/|\alpha''(s)|$  wohldefiniert. Aus  $|\alpha'(s)|^2 \equiv 1$  folgt weiter

$$0 = \frac{d}{ds} (|\alpha'(s)|^2) = 2\alpha'(s) \cdot \alpha''(s), \quad (2.8)$$

d.h.  $\alpha''(s)$  und somit auch  $n(s)$  stehen senkrecht auf  $\alpha'(s)$ .

**Definition 2.15** Man schreibt  $t(s)$  für den Einheitstangentenvektor  $\alpha'(s)$  und

$$\text{nennt} \quad n(s) = \frac{t'(s)}{|t'(s)|} = \frac{t'(s)}{\kappa(s)} \quad \text{den Normalenvektor} \quad (2.9)$$

(vgl. (2.7)) oder den **Hauptnormalenvektor**.

Die von  $t(s)$  und  $n(s)$  aufgespannte Ebene heißt **Schmiegebene** in  $s$  (Engl.: **osculating plane**).

Punkte  $s$ , in denen die Krümmung verschwindet, also  $\kappa(s) = 0$ , oder auch  $\alpha''(s) = 0$ , nennt man **singuläre Punkte der Ordnung 1**.

In singulären Punkten der Ordnung 1 gibt es **keine** Schmiegebene, weil es keinen Normalenvektor gibt.

**WIR VEREINBAREN:**

$$\text{Im folgenden} \quad \kappa(s) \neq 0. \quad (2.10)$$

Offenbar gilt (vgl. (2.9)):

$$t'(s) = \alpha''(s) = \kappa(s)n(s) \quad (2.11)$$

Der Vektor

$$b(s) = t(s) \times n(s), \quad (2.12)$$

wegen der Orthogonalität  $t(s) \perp n(s)$  (oder:  $t(s) \cdot n(s) \equiv 0$ ) ist der **Binormalenvektor**  $b(s)$  ebenfalls ein Einheitsvektor (vgl. Übung 1.5).  $b(s)$  steht senkrecht auf der Schmiegebene. Also wird *durch*  $|b'(s)|$  *die Änderungsrate der Schmiegebene gemessen*.

Weiter gilt: wegen  $|b(s)|^2 = 1$  gilt für die Ableitung  $b(s) \cdot b'(s) = 0$  und

$$b'(s) = [t(s) \times n(s)]' = t'(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s) = t(s) \times n'(s)$$

weil  $t'(s) \times n(s) = \kappa(s)n(s) \times n(s) = 0$  (vgl. (2.11) und (1.46), Satz V.3). Also,  $b(s) \perp b'(s)$  und  $t(s) \perp b'(s)$ , d.h.

$$b'(s) =: \tau_\alpha(s)n(s) \quad (2.13)$$

und (vgl. Fig. 2.5)

$$\{t(s), n(s), b(s)\} \text{ bildet eine } \mathbf{orthonormale Basis} \text{ im } \mathbb{R}^3. \quad (2.14)$$

**Definition 2.16** *Es sei  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $|\alpha'(s)| \equiv 1$  und  $\alpha''(s) \neq 0$  für  $s \in I$ . Dann nennt man  $\tau_\alpha(s)$ , definiert durch (2.13), die **Torsion** von  $\alpha$  bei  $s$ .*

Merke dass  $\kappa_\alpha \geq 0$ , aber  $\tau \in \mathbb{R}$ . Die geometrische Bedeutung der Torsion lüftet der folgende Satz.

**Lemma 2.17** *Die Spur  $\alpha$  ist flach (d.h., Spur  $\alpha \subset$  Ebene) dann und nur dann, wenn  $\tau_\alpha(s) = 0$  für alle  $s \in I$  (oder äquivalent dann und nur dann, wenn  $b(s) \equiv \text{const}$ ).*

**Beweis.** Liegt die Spur der Kurve  $\alpha$  in einer Ebene, z.B.  $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), 0)^\top$ , so folgt

$$t(s) = (\alpha_1'(s), \alpha_2'(s), 0)^\top, \quad \kappa_\alpha(s)n(s) = t'(s) = (\alpha_1''(s), \alpha_2''(s), 0)^\top,$$

so dass

$$b(s) = t(s) \times_\alpha n(s) = \frac{1}{\kappa_\alpha(s)} (0, 0, \alpha_1'(s)\alpha_2''(s) - \alpha_2'(s)\alpha_1''(s))^\top.$$

Dann  $b_1(s) \equiv b_2(s) \equiv 0$  und wir berechnen

$$b_3(s) = \frac{\alpha_1'(s)\alpha_2''(s) - \alpha_2'(s)\alpha_1''(s)}{\kappa_\alpha(s)} \equiv \pm 1,$$

Aus Stetigkeitsgründen ist die Schmiegebene der ganze  $\mathbb{R}^2$  und gilt

$$b(s) \equiv e_3 \quad \text{oder} \quad b(s) \equiv -e_3$$

für alle  $s$ . Also ist die Torsion  $\tau_\alpha(s) \equiv 0$ .

Umgekehrt sei  $\tau_\alpha(s) \equiv 0$  (und  $\kappa_\alpha(s) \neq 0!$ ). Dann ist  $b(s) \equiv b_0$ , und

$$(\alpha(s) \cdot b_0)' = \alpha'(s) \cdot b_0 = t(s) \cdot b_0 \equiv 0.$$

Damit ist  $\alpha(s) \cdot b_0 = \text{const}$ , d.h. Spur  $\alpha \subset \text{Ebene} \perp b_0$ . ■

**Lemma 2.18** *Die Torsion ist invariant unter Orientierungsänderung:  $\tau_{\alpha_-}(s) = \tau_\alpha(s)$  wobei  $\alpha_-(s) := \alpha(-s)$ .*

**Beweis.** In der Tat:

$$b_{\alpha_-}(s) = t_{\alpha_-}(s) \times n_{\alpha_-}(s) = -t_\alpha(-s) \times n_\alpha(-s) = -b_\alpha(-s),$$

so dass

$$b'_{\alpha_-}(s) = \tau_{\alpha_-}(s)n_{\alpha_-}(s) = b'_\alpha(-s) = \tau_\alpha(-s)n_\alpha(-s) = \tau_\alpha(-s)n_{\alpha_-}(s)$$

und es folgt  $\tau_{\alpha_-}(s) = \tau_\alpha(s)$ . ■

**Definition 2.19** *Die Basis  $F(s) := \{t(s), n(s), b(s)\}$  heißt **Frenet'sches Dreibein** (begleitendes Dreibein) im Punkt  $s$ .*

**Lemma 2.20** *Das Frenet'sche (begleitende) Dreibein  $F(s) = \{t(s), n(s), b(s)\}$  einer regulären Kurve  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist eine orthonormierte positiv orientierte Basis im  $\mathbb{R}^3$  für alle  $s \in I$ .*

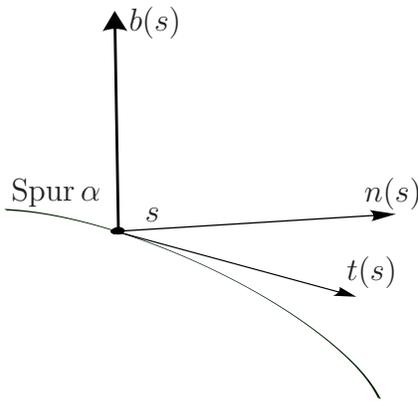
**Beweis.** Es fehlt nur die positive Orientiertheit zu beweisen (vgl. (2.14)). Diese folgt gemäß der Definition des Binormalenvektors  $b(s)$  (vgl. (2.12)) aus Lemma 1.27.i:

$$0 < |t(s) \times n(s)|^2 = (t(s) \times t(s), t(s) \times t(s)) = \det[t(s), n(s), t(s) \times n(s)]. \quad \text{QED}$$

Wir haben die Ableitungen  $t'(s)$  und  $b'(s)$  berechnet (vgl. (2.11) und (2.13)). Es fehlt noch die Ableitung  $n'(s)$ : aus  $n = b \times t$  folgt

$$n' = b' \times t + b \times t' = \tau(n \times t) + \kappa(b \times n) = -\tau b - \kappa t. \quad (2.15)$$

Die **Frenet'schen Formeln** folgen aus (2.11), (2.13) und (2.15), sie lauten:



Das Frenet'sches Dreibein

Fig. 2.5

$$\begin{cases} t'(s) = \kappa(s)n(s), \\ n'(s) = -\tau(s)b(s) - \kappa(s)t(s), \\ b'(s) = \tau(s)n(s). \end{cases} \quad (2.16)$$

Die  $tb$ -Ebene nennt man die **rektifizierende Ebene**.

Die  $nb$ -Ebene nennt man die **Normalebene**.

Die **Hauptnormale** ist die Gerade durch  $\alpha$  in Richtung des Vektors  $n$ .

Und wir erinnern nochmal an die schon eingeführte Bezeichnung der  $tn$ -Ebene: die **Schmiegebene**.

Mit **Binormale** wird die Gerade durch  $\alpha$  in Richtung des Vektors  $b$  bezeichnet.

Der Wert  $R := \frac{1}{\kappa}$  heißt **Krümmungsradius (Krümmungskreis)**

Dass Gleichungssystem (2.16) nimmt die folgende Gestalt an

$$F'(s) = \mathfrak{F}(s) F(s), \quad F(s) := \begin{bmatrix} t(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{F}(s) := \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

wobei  $\mathfrak{F}$  eine antisymmetrische Matrix  $\mathfrak{F}^\top = -\mathfrak{F}$  ist.

**Für ebene Kurven ist es möglich eine orientierte Krümmung einzuführen.**

Es sei  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte reguläre ebene Kurve (d.h.  $|\alpha'| \equiv 1$ ). Die kanonische Basis  $\{e_1, e_2\}$  des  $\mathbb{R}^2$  liefert die positive Orientierung. Da  $t(s) = \alpha'(s) \neq 0$ , gibt es im  $\mathbb{R}^2$  (aber nicht im  $\mathbb{R}^3$ ) genau zwei Einheitsvektoren senkrecht zu  $t(s)$ ; der (Haupt-)Normalenvektor  $n(s)$  sei derjenige von ihnen, so dass  $(t(s), n(s))^\top$  die positive Orientierung liefert (vgl. Fig. 2.6).

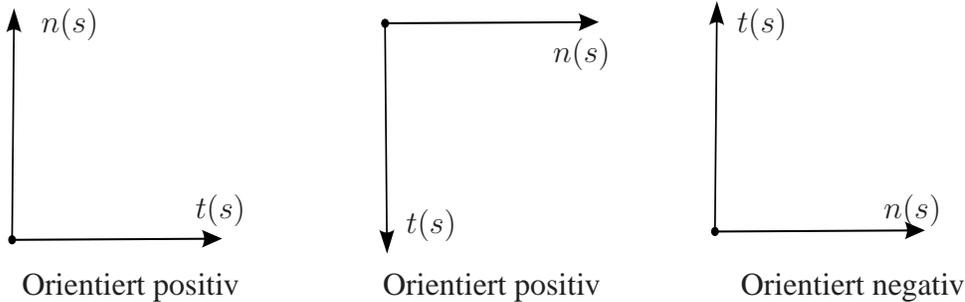


Fig. 2.6

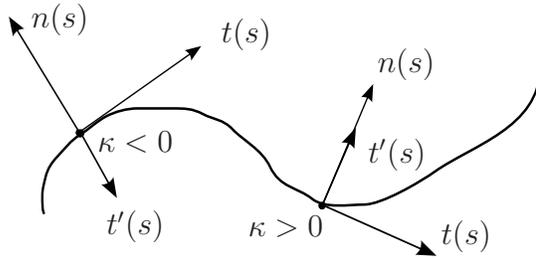


Fig. 2.7

**Definition 2.21** Die **orientierte Krümmung** einer nach der Bogenlänge parametrisierten **ebenen Kurve**  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  an der Stelle  $s$  ist die Zahl  $\kappa(s) \in \mathbb{R}$ , für die gilt (vgl. Fig. 2.7)

$$t'(s) = \kappa(s)n(s). \quad (2.18)$$

**Bemerkung:** Offenbar ist  $|\kappa(s)|$  die zuvor definierte Krümmung.

Für eine Raumkurve  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist die positive Orientierung des Dreibeins  $F(s) := \{t(s), n(s), b(s)\}$  automatisch durch den Vektor  $b(s)$  bestimmt (vgl. Lemma 2.20). Denn nur für flache Kurven  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  kann die positive Orientierung von  $\{t(s), n(s)\}$  mit Hilfe des Vektor  $n(s)$  bestimmt werden.

Bei Orientierungsänderung wechselt die orientierte Krümmung das Vorzeichen:

$$\alpha_-(s) := \alpha(-s), \quad \alpha'_-(s) = -\alpha'(-s) = -t_\alpha(-s)$$

deshalb:  $n_{\alpha_-}(s) = -n_\alpha(-s)$  sowie  $t'_{\alpha_-}(s) = \alpha''_-(s) = t'_\alpha(-s) = \kappa_\alpha(-s)n_\alpha(-s) = -\kappa_\alpha(-s)n_{\alpha_-}(s)$  also:

$$\kappa_{\alpha_-}(s) = -\kappa_\alpha(-s). \quad (2.19)$$

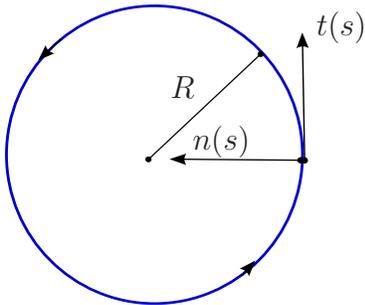


Fig. 2.8

**Beispiel 2.22** Betrachten wir wieder eine Kreislinie vom Radius  $R > 0$  (vgl. Beispiel 2.11), die wie in (2.6) parametrisiert ist.

Berechnen wir die Tangente, die Hauptnormale und die Krümmung:

$$t(s) = \alpha'_R(s) = \left(-\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R}\right)^\top = ie^{is/R},$$

$$n(s) = \left(-\cos \frac{s}{R}, -\sin \frac{s}{R}\right)^\top = i(i e^{is/R}) = -e^{is/R},$$

$$\det [t(s), n(s)] = \det \begin{bmatrix} -\sin \frac{s}{R} & \cos \frac{s}{R} \\ -\cos \frac{s}{R} & -\sin \frac{s}{R} \end{bmatrix} \equiv 1 > 0,$$

$$t'(s) = \alpha''_R(s) = \frac{1}{R} \left(-\cos \frac{s}{R}, -\sin \frac{s}{R}\right)^\top = \frac{1}{R} n(s) \Rightarrow \kappa_R(s) \equiv \frac{1}{R}. \quad \blacksquare$$

**Lemma 2.23** Sei  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine reguläre Kurve. Im allgemeinen ist  $|\alpha'(u)| \neq 1$  und  $s = s(u)$  sei dann die Bogenlänge und

$$\beta(s) := \alpha(u(s)), \quad \beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$$

die entsprechende Umparametrisierung nach der Bogenlänge.

Dann gilt

$$\kappa_\alpha(u) = \kappa_\beta(s(u)) = \frac{|\alpha'(u) \times \alpha''(u)|}{|\alpha'(u)|^3}. \quad (2.20)$$

für die Krümmung und

$$\tau_\alpha(u) = -\frac{(\alpha'(u) \times \alpha''(u)) \cdot \alpha'''(u)}{|\alpha'(u) \times \alpha''(u)|}. \quad (2.21)$$

für die Torsion.

**Beweis.** Nach (2.11) ist  $\kappa_\beta(s) = |\beta''(s)|$  so dass

$$\begin{aligned} (\kappa_\beta(s))^2 &= [\beta''(s)]^2 = \{[\alpha'(u(s))u'(s)]'\}^2 = \left\{ \left[ \frac{\alpha'(u(s))}{|\alpha'(u(s))|} \right]' \right\}^2 \\ &= \left\{ \frac{|\alpha'(u(s))|u'(s)\alpha''(u(s)) - [|\alpha'(u(s))|]'\alpha'(u(s))}{|\alpha'(u(s))|^2} \right\}^2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

weil  $u(s)$  monoton ist und deswegen

$$|\beta'(s)| = |\alpha'(u(s))||u'(s)| = 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq u'(s) = |u'(s)| = \frac{1}{|\alpha'(u(s))|}. \quad (2.23)$$

Andererseits

$$(|\alpha'(u(s))|)' = \left[ \frac{\alpha'(u(s)) \cdot \alpha'(u(s))}{|\alpha'(u(s))|} \right]' = 2 \frac{\alpha''(u(s)) \cdot \alpha'(u(s))}{|\alpha'(u(s))|} u'(s) - (|\alpha'(u(s))|)'$$

und mit (2.23) folgt:

$$(|\alpha'(u(s))|)' = \frac{\alpha''(u(s)) \cdot \alpha'(u(s))}{|\alpha'(u(s))|} u'(s) = \frac{\alpha''(u(s)) \cdot \alpha'(u(s))}{|\alpha'(u(s))|^2}. \quad (2.24)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (2.23) und (2.24) setzen wir (2.22) fort:

$$\begin{aligned}
(\kappa_\beta(s))^2 &= \left\{ \frac{|\alpha'(u(s))| u'(s) \alpha''(u(s)) - [|\alpha'(u(s))|]' \alpha'(u(s))}{|\alpha'(u(s))|^2} \right\}^2 \\
&= \left\{ \frac{|\alpha'(u(s))|^2 \alpha''(u(s)) - [\alpha''(u(s)) \cdot \alpha'(u(s))] \alpha'(u(s))}{|\alpha'(u(s))|^4} \right\}^2 \\
&= \frac{|\alpha''(u(s))|^2}{|\alpha'(u(s))|^4} - 2 \frac{(\alpha''(u(s)) \cdot \alpha'(u(s)))^2}{|\alpha'(u(s))|^6} + \frac{(\alpha''(u(s)) \cdot \alpha'(u(s)))^2}{|\alpha'(u(s))|^6} \\
&= \frac{|\alpha''(u(s))|^2 |\alpha'(u(s))|^2 - (\alpha''(u(s)) \cdot \alpha'(u(s)))^2}{|\alpha'(u(s))|^6}, \\
&= \frac{|\alpha''(u(s)) \times \alpha'(u(s))|^2}{|\alpha'(u(s))|^6}
\end{aligned}$$

(ähnliche Rechnung (1.49)) und wir erhalten die Formel (2.20).

Für die Torsion erhalten wir mit  $b' = \tau_\beta n$

$$\tau_\alpha(u) = \tau_\beta(s(u)) = n(s) \cdot [\tau_\beta(s(u)) n(s)] = n(s) \cdot b'(s)$$

und mit  $b(s) = t(s) \times n(s)$ ,  $t's) = \kappa(s)(n(s)$

$$\begin{aligned}
b'(s) &= t'(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s) = \kappa(s) (n(s) \times n(s)) + t(s) \times n'(s) \\
&= t(s) \times n'(s).
\end{aligned}$$

Dann

$$\begin{aligned}
\tau_\alpha(u) &= n(s) \cdot b'(s) = n(s) \cdot [t(s) \times n'(s)] = \det [t(s), n'(s), n(s)] \\
&= \det \left[ \beta'(s), \left[ \frac{\beta''(s)}{\kappa(s)} \right]', \frac{\beta''(s)}{\kappa(s)} \right] \\
&= \frac{\det [\beta'(s), \beta'''(s), \beta''(s)]}{\kappa^2(s)} + \det \left[ \beta'(s), -\frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)} \beta''(s), \frac{1}{\kappa(s)} \beta''(s) \right] \\
&= \frac{\det [\beta'(s), \beta'''(s), \beta''(s)]}{\kappa^2(s)} = -\frac{\det [\beta'(s), \beta''(s), \beta'''(s)]}{\kappa^2(s)},
\end{aligned}$$

weil  $\det [\beta'(s), a(s)\beta''(s), b(s)\beta''(s)] = 0$  für beliebige stetige Funktionen  $a(s)$  und  $b(s)$ .

Mit

$$\beta' = \frac{\alpha'}{|\alpha'|}, \quad \beta'' = -\frac{\alpha''}{|\alpha'|} + (\dots)\alpha', \quad \beta''' = \frac{\alpha'''}{|\alpha'|} + (\dots)\alpha'' + (\dots)\alpha'$$

folgt dann, mit Hilfe (1.41) und (2.20),

$$\tau_\alpha(u) = \frac{\det (\alpha'(u), \alpha''(u), \alpha'''(u))}{\kappa^2(u) |\alpha'(u)|^3} = -\frac{(\alpha'(u) \times \alpha''(u))}{|\alpha'(u) \times \alpha''(u)|} \cdot \alpha'''(u).$$

und Formel (2.21) ist bewiesen. ■

**Korollar 2.24** Als Spezialfall erhält man mit der richtigen Vorzeichenauswahl für eine reguläre ebene Kurve  $\alpha(u) = (x(u), y(u))^T = (x(u), y(u), 0)^T$  die folgende Formel für orientierte Krümmung:

$$\kappa_\alpha(u) = \frac{x'(u)y''(u) - x''(u)y'(u)}{\left[(x'(u))^2 + (y'(u))^2\right]^{3/2}}. \quad (2.25)$$

Insbesondere gilt im Fall eines Graphen  $\alpha(u) = (u, f(u))^T$  über der  $x$ -Achse:

$$\kappa_f(u) = \frac{f''(u)}{\left[1 + (f'(u))^2\right]^{3/2}}. \quad (2.26)$$

Für eine ebene Kurve in Polarkoordinaten  $\alpha(\theta) = \rho(\theta)(\cos \theta, \sin \theta)^T$  ergibt sich:

$$\kappa_\rho = \frac{2(\rho')^2 - \rho\rho'' + \rho^2}{\left[(\rho')^2 + \rho^2\right]^{3/2}}. \quad (2.27)$$

Um den nächsten Satz zu formulieren brauchen wir einen neuen Begriff.

**Definition 2.25** Die lineare Transformation

$$F(x) = Sx + c, \quad F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

heißt **eigentliche Bewegung (rigid motion im Englischen)** wenn  $c \in \mathbb{R}^n$  konstant und  $S \in SO(n)$  eine orthogonale Matrix  $S^T = S^{-1}$  ist.

**Theorem 2.26 (Fundamentalsatz der lokalen Kurventheorie).** Es sei  $I = [s_0, s_1] \subset \mathbb{R}$  ein Intervall, und die Funktionen  $\kappa : I \rightarrow (0, \infty)$ ,  $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$  seien differenzierbar. Dann gibt es eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \kappa_\alpha(s) = \kappa(s) \quad \text{und} \quad \tau_\alpha(s) = \tau(s). \quad (2.28)$$

Die Kurve ist eindeutig bestimmt vorausgesetzt die Kurve und die orthogonale positiv orientiertes Dreibein  $(t_0, n_0, b_0)^T$  im Anfangspunkt sind bestimmt:

$$\alpha(s_0) = \alpha_0 \quad t(s_0) = t_0, \quad n(s_0) = n_0 \quad \text{und} \quad b(s_0) = b_0 \quad (2.29)$$

Die Kurve ist, ohne Anfangsbedingungen (2.29), bis auf eigentliche Bewegungen im  $\mathbb{R}^3$  eindeutig bestimmt: für ein beliebige nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\kappa_\beta = \kappa$  und  $\tau_\beta = \tau$  gilt  $\beta = S\alpha + c$ , wobei  $Sx + c$  die eigentliche Bewegung ist.

**Beweis:** Die Frenetschen Gleichungen (2.16) liefern ein lineares System von gewöhnlichen Differentialgleichungen auf  $I \times \mathbb{R}^9 = I \times (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ :

$$\xi_i'(s) = f_i(s, \xi), \quad i = 1, \dots, 9 \quad (2.30)$$

angenommen  $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_9)^\top$ ,

$$t = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^\top, \quad n = (\xi_4, \xi_5, \xi_6)^\top, \quad b = (\xi_7, \xi_8, \xi_9)^\top.$$

Weil Funktionen  $f_i(s, \xi)$  bezüglich der Variable  $\xi$  global Lipschitz-stetig sind, liefert der Satz von Picard-Lindelöf (Satz 1.31) die folgende Aussage: Zu gegebenem  $s_0 \in I$  und gegebener Anfangsbedingung  $\xi_0 = \xi(s_0)$  gibt es eine eindeutig bestimmte differenzierbare Abbildung

$$X : I \rightarrow \mathbb{R}^9 \quad \text{mit} \quad X'(s) = f(s, X(s)) \quad \text{und} \quad X(s_0) = \xi_0.$$

Ist  $\xi_0 = (t_0, n_0, b_0)$  ein gegebenes positiv orientiertes Dreibein (siehe (2.29)), so liefert  $X$  eine Familie von Vektorfunktionen:

$$X(s) = (t(s), n(s), b(s))^\top \quad \text{mit} \quad t(s_0) = t_0, \quad n(s_0) = n_0, \quad b(s_0) = b_0 \quad (2.31)$$

Als nächstes werden wir beweisen, dass das gelieferte Funktionensystem  $X(s)$  ein Dreibein ist:

$$(t(s), n(s), b(s))^\top \quad \text{bleibt orthonormal für alle} \quad s \in I, \quad (2.32)$$

vorausgesetzt es war orthonormal zum Zeitpunkt  $s = s_0$ .

Aus den Frenetschen Gleichungen (2.16) (vgl. System (2.30)) folgt:

$$\left\{ \begin{array}{l} (t \cdot n)' = \kappa(n \cdot n) - \kappa(t \cdot t) - \tau(t \cdot b) = \kappa - \kappa = 0, \\ (t \cdot b)' = \kappa(n \cdot b) + \tau(t \cdot n) = 0, \\ (n \cdot b)' = -\kappa(t \cdot n) - \tau(b \cdot b) + \tau(n \cdot n) = -\tau + \tau = 0, \\ (t \cdot t)' = 2\kappa(t \cdot n) = 0, \\ (n \cdot n)' = -2\kappa(t \cdot n) - 2\tau(b \cdot n) = 0, \\ (b \cdot b)' = 2\tau(n \cdot b) = 0. \end{array} \right. \quad (2.33)$$

Bei (2.33) handelt es sich um ein System linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung für die sechs Funktionen

$$\eta_1 := t \cdot n, \quad \eta_2 := t \cdot b, \quad \eta_3 := n \cdot b, \quad \eta_4 := |t|^2, \quad \eta_5 := |n|^2, \quad \eta_6 := |b|^2$$

mit den Eigenschaften  $\eta_j'(s) \equiv 0 \Rightarrow \eta_j(s) \equiv \text{const}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 6$  und der Anfangsbedingung

$$\eta(s_0) = (t_0 \cdot n_0, t_0 \cdot b_0, n_0 \cdot b_0, |t_0|^2, |n_0|^2, |b_0|^2)^\top = (0, 0, 0, 1, 1, 1)^\top.$$

Offenbar gilt dann  $\eta(s) = (0, 0, 0, 1, 1, 1)^\top$  für alle  $s \in I$ , also die gewünschte Orthonormalität.

Das orthonormale Dreibein  $(t(s), n(s), b(s))^\top$  ist dann auch automatisch positiv orientiert, da  $\det [t_0, n_0, b_0] = 1$  und  $\det [t(s), n(s), b(s)] = -1$  aus Stetigkeitsgründen ausgeschlossen ist (nur  $\sqrt{pm1}$  treten als Werte auf). Nun definiere für  $s \in I$  die Kurve  $\alpha$  durch

$$\alpha(s) = \alpha_0 + \int_{s_0}^s t(\lambda) d\lambda \quad (2.34)$$

und beachte, dass  $\alpha$  nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Wegen der ersten drei Differentialgleichungen in (2.30) (vgl. erste Differentialgleichung in (2.16)) gilt

$$\alpha'(s) = t(s), \quad \alpha''(s) = t'(s) = \kappa(s)n(s), \quad (2.35)$$

also ist  $\kappa_\alpha = \kappa$ .

Wegen der nächsten drei Differentialgleichungen in (2.30) (vgl. zweite Differentialgleichung in (2.16)) und Gleichung (2.35) gilt

$$\alpha''' = \kappa'n + \kappa n' = \kappa'n - \kappa^2 t - \kappa \tau b \quad (2.36)$$

und, zusammen mit (2.21), (2.35), (2.36),

$$\begin{aligned} \tau_\alpha &= -\frac{\alpha' \times \alpha''}{|\alpha' \times \alpha''|^2} \cdot \alpha''' = -\frac{(t \times \kappa n) \cdot (\kappa'n - \kappa^2 t - \kappa \tau b)}{\kappa^2 |t \times n|^2} \\ &= \frac{\kappa^2 \tau (t \times n) \cdot b}{\kappa^2} = \tau b \cdot b = \tau. \end{aligned}$$

Damit ist  $\alpha$  die gesuchte Kurve.

Nun kommen wir zur letzten Aussage, der *Eindeutigkeit bis auf eigentliche Bewegungen*: Diese folgt aus der Tatsache, dass man zwei positiv orientierte orthonormale Dreibeine mittels eines Elementes aus  $SO(3)$  ineinander überführen kann. Der gewünschte Eindeutigkeitsatz liefert dann die bereits bewiesene Eindeutigkeit von  $(t, n, b)^\top$  mit Anfangsbedingungen (2.29).

Da man  $\alpha$  durch Integration, nämlich mit (2.34), aus  $t$  gewinnt, können sich  $\alpha$  und  $\beta$  nur noch um eine Translation voneinander unterscheiden. ■

### Geometrische Interpretation von Torsion, Krümmung usw.

Es sei  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\alpha \in C^4(I)$ ,  $|\alpha'| \equiv 1$ ,  $s_0 \in I$ ,  $\kappa_\alpha(s_0) = |\alpha''(s_0)| > 0$ . Eine Taylor-Entwicklung um  $s_0 = 0$  führt auf

$$\alpha(s) = \alpha(0) + s\alpha'(0) + \frac{1}{2}s^2\alpha''(0) + \frac{1}{6}s^3\alpha'''(0) + R(s), \quad R(s) = \mathcal{O}(s^4),$$

wobei die Notation  $R(s) = \mathcal{O}(s^m)$  bedeutet, dass  $\lim_{s \rightarrow 0} R(s)s^{-m}$  existiert und beschränkt ist. Aus

$$\alpha'(0) = t(0), \quad \alpha''(0) = \kappa(0)n(0)$$

$$\alpha'''(s) = (\kappa n)'(s) = \kappa'(s)n(s) + \kappa(s)n'(s) = \kappa'(s)n(s) - \kappa^2(s)t(s) - \kappa(s)\tau(s)b(s)$$

folgt mit  $t = t(0)$ ,  $n = n(0)$ ,  $b = b(0)$ ,  $\kappa = \kappa(0)$  und  $\tau = \tau(0)$

$$\alpha(s) - \alpha(0) = \left(s - \frac{\kappa^2 s^3}{6}\right)t + \left(\frac{\kappa s^2}{2} + \frac{\kappa' s^3}{6}\right)n - \frac{\kappa \tau s^3}{6}b + \mathcal{O}(s^4).$$

Offenbar können wir nach Translation und Drehung annehmen

$$\alpha(0) = 0, \quad (t, n, b) = (e_1, e_2, e_3),$$

so dass mit  $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))^T$  folgt

$$\begin{cases} x(s) = s - \frac{\kappa^2 s^3}{6} + \mathcal{O}(s^4), \\ y(s) = \frac{\kappa s^2}{2} + \frac{\kappa' s^3}{6} + \mathcal{O}(s^4), \\ z(s) = -\frac{\kappa \tau s^3}{6} + \mathcal{O}(s^4), \end{cases} \quad R = (R_x, R_y, R_z)^T. \quad (2.37)$$

Man nennt die Darstellung (2.37) die **lokale Normalform** der Kurve  $\alpha$  in einer Umgebung von  $s = 0$ .

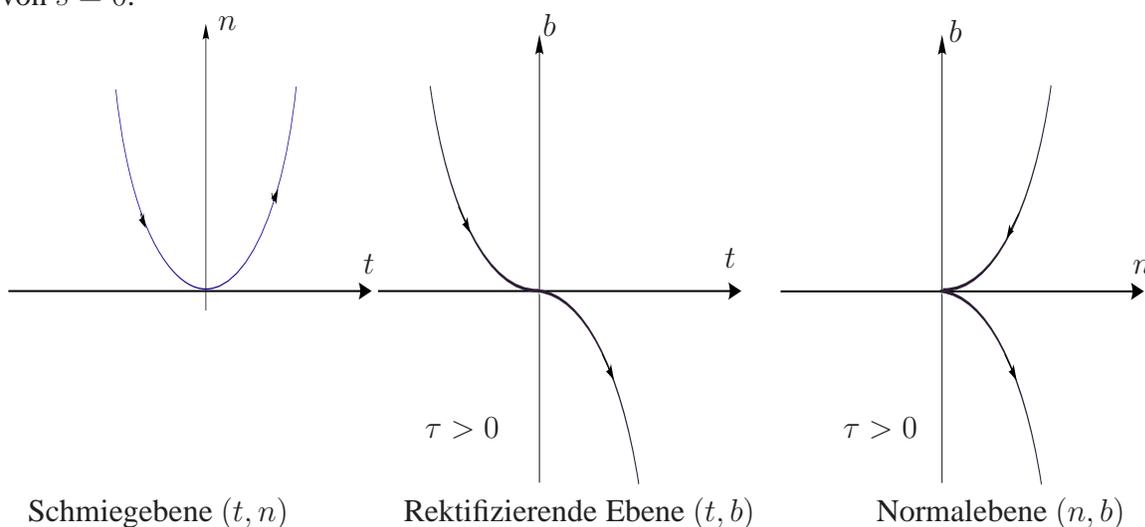


Fig. 2.9

Für hinreichend kleine  $|s|$  dominieren die Potenzen niedrigster Ordnung, d.h. die Projektion der Kurve  $\alpha$  in die

$$\left\{ \begin{array}{ll} (x, y) - \text{Ebene ist die Parabel} & s \mapsto \left( s, \frac{\kappa s^2}{2} \right), \\ (x, z) - \text{Ebene ist die Kubische Hyperbel} & s \mapsto \left( s, \frac{\kappa \tau s^3}{6} \right), \\ (x, y) - \text{Ebene ist die Neil'sche Parabel} & s \mapsto \left( \frac{\kappa s^2}{2}, \frac{\kappa \tau s^3}{6} \right) \end{array} \right.$$

(siehe Fig. 2.9).

**Korollar 2.27** Ist  $\tau \neq 0$ , so durchstößt die Kurve in  $s = 0$  die Schmiegebene, für  $\tau > 0$  kreuzt  $\alpha$  die Schmiegebene in Richtung  $-b$ , und für  $\tau < 0$  kreuzt  $\alpha$  die Schmiegebene in Richtung  $b$  (siehe Fig. 2.10).

**Beweis.** Die Aussage folgt unmittelbar aus der dritten Gleichung des Gleichungssystems (2.37), weil  $z(s)$  an der Stelle  $s = 0$  das Vorzeichen wechselt. ■

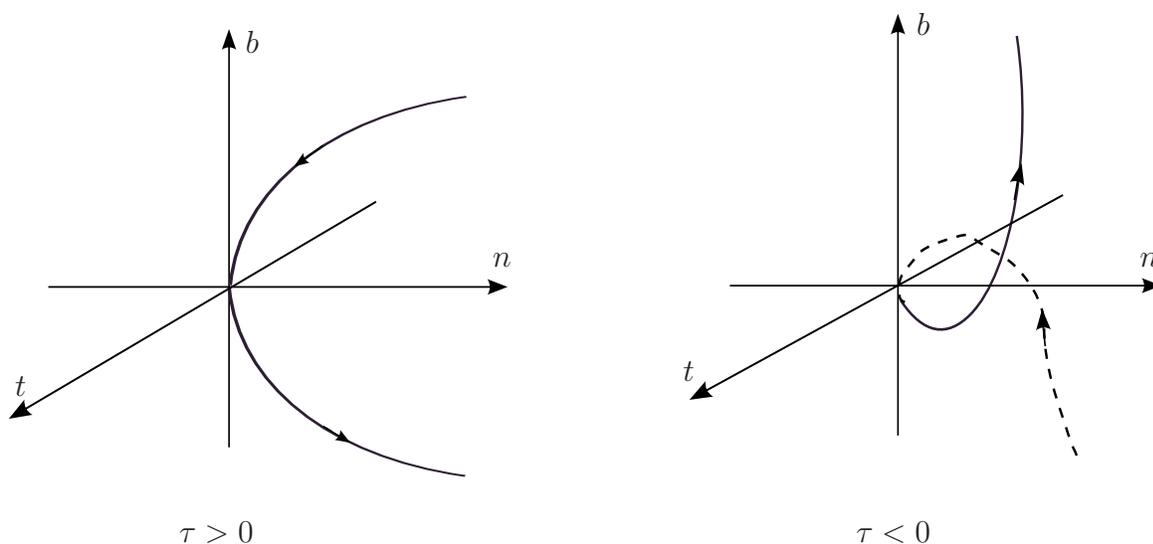


Fig. 2.10

**Korollar 2.28** Offenbar gibt es eine Nullumgebung  $J \subset I$ , so dass die Spur  $\alpha(J)$  ganz auf einer Seite der rektifizierenden Ebene verläuft, nämlich auf der, in die  $n$  zeigt; nur  $\alpha(0) \in (t, b)$ -Ebene.

Die Schmiegebene ist die Grenzlage der Ebenen  $T(h)$  bei  $h \rightarrow 0$ . Hierbei ist  $T(h)$  die durch  $\alpha(s+h)$  und  $t(s)$  bestimmte Ebene.

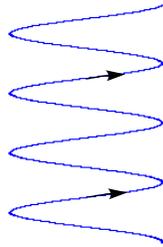
**Beweis.** Die erste Aussage folgt aus der zweiten Gleichung in (2.37), weil in  $y(s) = n(s)$  der Term  $\kappa s^2/2$  dominiert.

Sei  $s = 0$ ,  $\{t, n, b\} = \{e_1, e_2, e_3\}$ . Enthält eine Ebene  $T$  die Tangente, also  $e_1$ , so gilt entweder  $T = \{(x, y, z) : y = 0\}$ , d.h.  $T$  ist die rektifizierende Ebene oder  $T = \{(x, y, z) : z = cy\}$  für ein  $c \in \mathbb{R}$ .

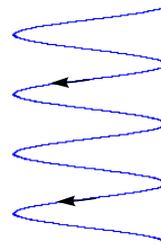
Im ersten Fall enthält  $T$  aber keine Punkte  $\alpha(h)$  mit  $h \neq 0$  (nahe 0). Also tritt der zweite Fall ein. Nun ist die Aussage: die Ebene  $\{z = cy\}$  enthält  $\alpha(h)$  äquivalent zu:

$$c(h) = \frac{z(h)}{y(h)} = \frac{-\frac{1}{6}\kappa\tau h^3 + \dots}{\frac{1}{2}\kappa h^2 + \frac{1}{6}\kappa' h^3 + \dots} = -\frac{1}{6}\kappa\tau h \frac{1}{\frac{1}{2}\kappa + o(h)} = \mathcal{O}(h),$$

d.h.  $c(h) \rightarrow 0$  bei  $h \rightarrow 0$ . Also ist die Grenzlage die Ebene  $\{z = 0\}$ , d.h. die  $(x, y)$ -Ebene, also die Schmiegebene. ■



Negative Torsion  $\tau < 0$



Positive Torsion  $\tau > 0$

Fig. 2.11

**Beispiel 2.29** Berechnen wir die tangentialen, normalen und binormalen Vektoren, sowie die Krümmung und die Torsion der Helix aus Beispiel 1.14. Die nach Bogenlänge parametrisierte Helix lautet:

$$\alpha : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \alpha(s) = \left( R \cos \frac{s}{c}, R \sin \frac{s}{c}, h \frac{s}{c} \right)^\top, \quad c := \sqrt{h^2 + R^2},$$

$$h > 0, \quad R > 0, \quad \alpha'(s) = t(s) = \frac{1}{c} \left( R \sin \frac{s}{c}, R \cos \frac{s}{c}, h \right)^\top,$$

$$\alpha''(s) = \frac{R}{c^2} \left( -\cos \frac{s}{c}, -\sin \frac{s}{c}, 0 \right)^\top = \kappa(s)n(s),$$

$$n(s) := \left( -\cos \frac{s}{c}, -\sin \frac{s}{c}, 0 \right)^\top, \quad \kappa(s) := \frac{R}{c^2},$$

$$b(s) = t(s) \times n(s) = \frac{1}{c} \left( h \sin \frac{s}{c}, -h \cos \frac{s}{c}, R \right)^\top,$$

$$b(s) = \frac{h}{c^2} \left( \cos \frac{s}{c}, \sin \frac{s}{c}, 0 \right)^\top = \tau(s)n(s), \quad \tau(s) = -\frac{h}{c^2}.$$

## 2.3 GLOBALE KURVENTHEORIE

In diesem Abschnitt betrachten wir ebene Kurven mit orientierter Krümmung.

**Definition 2.30** Eine (reguläre) Kurve  $\alpha : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **geschlossen** (heißt  $C^k$ -glatt), wenn es eine (reguläre) Kurve  $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  gibt (die glatt ist  $\alpha \in C^k(\mathbb{R})$ ) mit  $\tilde{\alpha}|_{[a,b)} = \alpha$  und  $\tilde{\alpha}(t+L) = \tilde{\alpha}(t)$  für  $L := b-a$  und alle  $t \in \mathbb{R}$ , d.h.  $\tilde{\alpha}$  ist periodisch mit Periode  $L = b-a$ .

Eine geschlossene Kurve  $\alpha$  heißt **einfach geschlossen**, wenn  $\alpha = \tilde{\alpha}|_{[a,b)}$  injektiv ist:  $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$  für  $a \leq t_1 < t_2 < b$ .

Es ist offensichtlich dass eine reguläre Kurve  $\alpha : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  dann und nur dann  $C^k$ -glatt ist, wenn alle Ableitungen bis zur Ordnung  $k$  in ihren Endpunkten übereinstimmen:  $\alpha^{(m)}(a) = \alpha^{(m)}(b)$ ,  $m = 1, \dots, k$ .

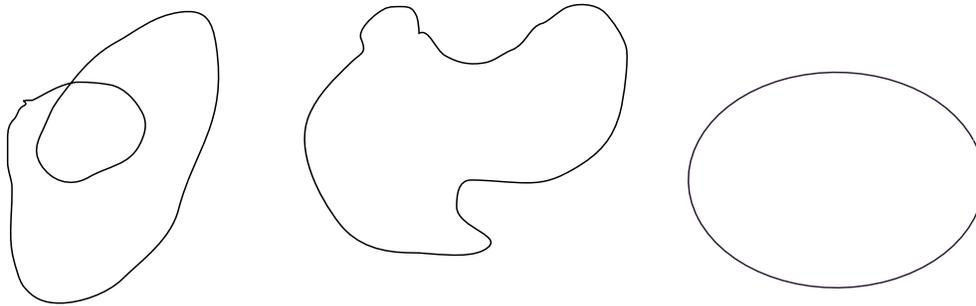


Fig. 2.12

**Theorem 2.31** Die globalen Aussagen lauten:

- A. Eine Kurve  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist eine Gerade  $\alpha(t) = at + b$  mit den Koeffizienten  $a, b \in \mathbb{R}$  und dem Parameter  $t \in \mathbb{R}$  dann und nur dann, wenn sie eine triviale Krümmung  $\kappa_\alpha(t) \equiv 0$  hat.
- B. Eine Kurve  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist flach (ist eine ebene Kurve) dann und nur dann, wenn ihre Torsion überall verschwindet  $\tau_\alpha \equiv 0$ .
- C. Die Spur  $\alpha$  einer regulären Kurve  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist eine Kreislinie oder ein Teil einer Kreislinie dann und nur dann, wenn ihre Krümmung konstant  $\kappa_\alpha \equiv \text{const} \neq 0$  und ihre Torsion überall trivial  $\tau_\alpha \equiv 0$  ist.

**Beweis:** Die Aussage A ist offensichtlich: die Behauptung  $|\alpha''(t)| \equiv \kappa_\alpha(t) \equiv 0$  ist einerseits äquivalent zu  $\alpha''(t) \equiv 0$  und andererseits äquivalent zu der Aussage, dass  $\alpha$  eine Gerade der Form  $\alpha(t) = at + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  ist.

Die Aussage B ist Inhalt des Lemmas 2.17.

Um die Aussage C zu beweisen, bemerken wir, dass die Torsion überall verschwinden muss, damit  $\alpha$  eine ebene Kurve ist.

Weiter bemerken wir, dass  $t'(s) = \kappa(s)n(s)$  und  $n(s) = D_+^{90^\circ} t(s) = it(s)$  (siehe Fig. 2.12). Deshalb gilt

$$n'(s) = D_+^{90^\circ} t'(s) = D_+^{90^\circ} [\kappa(s)n(s)] = -\kappa(s)t(s). \quad (2.38)$$

Also gelten die Frenetsche Formeln auch für ebene Kurven und orientierte Krümmungen. Betrachten wir die entsprechende **Evolute**  $\alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}n(s)$ . Für  $\kappa \equiv \text{const} \neq 0$  folgt

$$\frac{d}{ds} \left[ \alpha(s) + \frac{1}{\kappa} n(s) \right] = \alpha'(s) + \frac{1}{\kappa} n'(s) = t(s) + \frac{1}{\kappa} [-\kappa t(s)] \equiv 0,$$

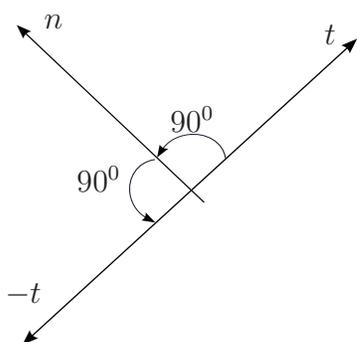


Fig. 2.13

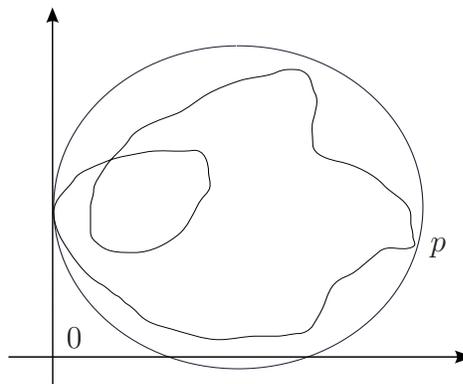


Fig. 2.14

also ist die Evolute eine Konstante:

$$\alpha(s) + \frac{1}{\kappa} n(s) \equiv P \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und damit} \quad |\alpha(s) - P| = \left| \frac{1}{\kappa} n(s) \right| = \frac{1}{|\kappa|}. \quad \blacksquare$$

Ein weiteres einfaches Beispiel einer globalen Aussage ist folgender Satz.

**Theorem 2.32** Ist  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine reguläre geschlossene ebene Kurve, so gilt

$$\max_{s \in I} \max_{t \in I} |\kappa_\alpha(s)| \geq \frac{2}{\text{diam}(\text{Spur } \alpha)}, \quad (2.39)$$

wobei  $\text{diam}(\text{Spur } \alpha) := \max_{s,t \in I} |\alpha(t) - \alpha(s)|$  die Diameter von Spur  $\alpha$  heißt.

**Beweis:** Zuerst betrachten wir den Fall, dass Spur  $\alpha$  kompakt ist und

$$R := \inf \{ r : \text{Spur } \alpha \subset K_r = \text{Kreis mit Radius } r \}.$$

Es sei  $R$  der Radius des eindeutig bestimmten Umkreises der Kurve  $\alpha$  (siehe Fig. 2.14). Dann berührt  $\alpha$  den Umkreis in mindestens einem Punkt  $p$ . O.B.d.A. nach geeigneter Drehung und Verschiebung verschieben wir  $p$  zu 0 und können nahe  $p = 0$  die Kurve  $\alpha$  als

Graph  $f$  und der Kreis als Graph  $g$  betrachten. Für die Kreisdarstellung gilt sogar mehr: der untere Halbkreis wird parametrisiert durch

$$g(t) = R - \sqrt{R^2 - t^2}, \quad -R \leq t \leq R. \quad (2.40)$$

Andererseits  $f(0) = g(0)$ ,  $f(t) \geq g(t)$  lokal  $|t| < \varepsilon$  und folglich ist 0 das lokale Minimum von  $f(t) - g(t)$  im Punkte  $t = 0$ :

$$f'(0) = g'(0) = 0, \quad f''(0) \geq g''(0) \geq 0. \quad (2.41)$$

Mit (2.26) und (2.41) gilt:

$$\max_{s \in I} |\kappa_\alpha(s)| \geq |\kappa_\alpha(0)| = \frac{|f''(0)|}{[1 + |f'(0)|^2]^{3/2}} = |f''(0)|$$

$$= f''(0) \geq g''(0) = \frac{|g''(0)|}{[1 + |g'(0)|^2]^{3/2}} \equiv \kappa_{\text{Kreis}} = \frac{1}{R} = \frac{2}{\text{diam}(\text{Spur } \alpha)}.$$

Andernfalls, wenn Spur  $\alpha$  nicht kompakt ist, gilt offenbar:

$$\max_{s \in I} |\kappa_\alpha(s)| \geq |\kappa_\alpha(p)| \geq \frac{2}{\text{diam}(\text{Spur } \alpha)} = 0. \quad \blacksquare$$

### Der Rotationsindex einer ebenen Kurve

Es sei  $\alpha : [0, L) \rightarrow \mathbb{R}^2$  geschlossen, außerdem sei  $\alpha(s) = (x(s), y(s))^\top$  nach Bogenlänge parametrisiert  $|\alpha'| \equiv 1$  und  $t : [0, L) \rightarrow \mathbb{S}^1$  mit  $t(s) = \alpha'(s)$  sei die Tangentenabbildung. Es gilt  $t' = \alpha'' = \kappa_\alpha n$ .

**Bemerkung:** Da  $\alpha$  geschlossen ist, ist auch  $t$  geschlossen.

**Heuristisch:** Wird Spur  $\alpha$  durchlaufen, so durchläuft  $t$  den Einheitskreis  $\mathbb{S}^1$  einfach oder mehrfach.

**Rotationsindex**  $I = I(\alpha)$  zählt, wieviele Male  $\mathbb{S}^1$  von Spur  $t$  abgefahren wird, oder wieviele Urbilder jeder Punkt  $p \in \text{Spur } t$  hat.

Unser Ziel ist den Umlaufsatz zu beweisen: wenn  $\alpha$  einfach geschlossen ist, dann  $I_\alpha = \pm 1$ .

Genauer: Es sei

$$\tilde{\theta}(s) := \angle[t(s), e_1] \in [0, 2\pi) \quad (2.42)$$

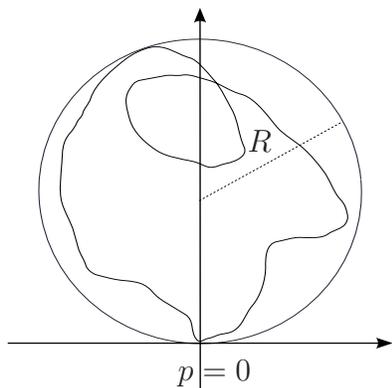


Fig. 2.15

der eindeutig bestimmte Winkel zwischen  $t(s)$  und der positiven  $x$ -Achse (gegen den Uhrzeigersinn gemessen). Diese Funktion  $\tilde{\theta}$  ist i.a. unstetig, nämlich in den Punkten  $s_0$ , für die  $\tilde{\theta}(s_0) = 0$  gilt.

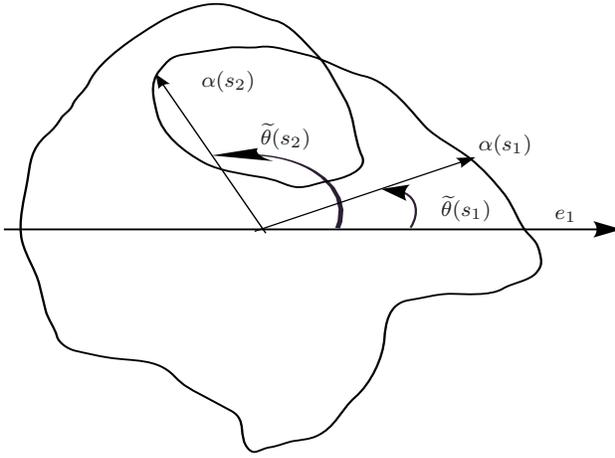


Fig. 2.16

Wir zerlegen

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_m = L \quad \text{mit} \quad |s_j - s_{j-1}| < \delta$$

und setzen  $\theta(s_0) = \tilde{\theta}(s_0)$ , so dass  $\theta$  auf  $[s_0, s_1)$  eindeutig bestimmt ist. Mit Induktion definieren wir stetige  $\theta$  auf  $[0, L)$  mit der Eigenschaft (2.43) eindeutig. ■

**Korollar 2.34** Setze:

$$I(\alpha) := \frac{1}{2\pi} [\theta(L) - \theta(0)] . \tag{2.44}$$

Dann ist die ganze Zahl  $I(\alpha) \in \mathbb{Z}$  unabhängig von der Wahl von  $\theta$ .

**Beweis:** Da der Rotationsindex  $I(\alpha)$  ganzzahlig ist folgt dies aus der Geschlossenheit der Kurve  $\theta : [0, L) \rightarrow \mathbb{S}^1$ .

Sei  $\theta_*$  eine weitere stetige Funktion mit der Eigenschaft (2.43). Dann ist für  $s \in [0, L)$

$$\theta_*(s) - \theta(s) = [\theta_*(s) - \tilde{\theta}(s)] - [\theta(s) - \tilde{\theta}(s)] = m(s)2\pi ,$$

wobei  $m(s) \in \mathbb{Z}$ ; andererseits ist  $m$  stetig, also  $m(s) \equiv m(0)$ . Es folgt  $\theta_* = \theta + 2\pi m(0)$ , so dass

$$\theta_*(L) - \theta_*(0) = [\theta(L) + 2\pi m(0)] - [\theta(0) + 2\pi m(0)] = \theta(L) - \theta(0) = I(\alpha) . \quad \blacksquare$$

**Lemma 2.33** Es gibt eine stetige Funktion  $\theta : [0, L) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\theta(s) \equiv \tilde{\theta}(s) \text{ mod } (2\pi) . \tag{2.43}$$

**Beweis:** Da  $t : [0, L) \rightarrow \mathbb{S}^1$  stetig ist und  $[0, L)$  kompakt, ist  $t$  gleichmäßig stetig. Also gibt es ein  $\delta > 0$  so, dass für alle  $s_1, s_2 \in [0, L)$  gilt: Ist  $|s_1 - s_2| < \delta$ , so liegen  $t(s_1)$  und  $t(s_2)$  in einer offenen Halbebene.

Ist dann  $\theta(s_1)$  bekannt, so folgt aus der Forderung der Stetigkeit von  $\theta(s)$ , dass  $\theta(s_2)$  eindeutig bestimmt ist.

**Definition 2.35** Es sei  $\alpha : [0, L) \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine geschlossene, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve und  $\theta$  eine stetige Funktion wie in Lemma 2.33.

Dann heißt die ganze Zahl  $I(\alpha)$  aus (2.44) **Rotationsindex** der Kurve  $\alpha$  (siehe Beispiele Fig. 2.17).

**Bemerkung 2.36** Beim Beweis der Existenz von  $\theta$  wurde nur benutzt, dass die Tangentenkurve  $t : [0, L) \rightarrow \mathbb{S}^1$  stetig ist und geschlossen  $t(0) = t(L)$  (d.h. die Kurve selbst  $\alpha : [0, L) \rightarrow \mathbb{R}^2$  soll geschlossen und  $C^1$ -glatt sein).

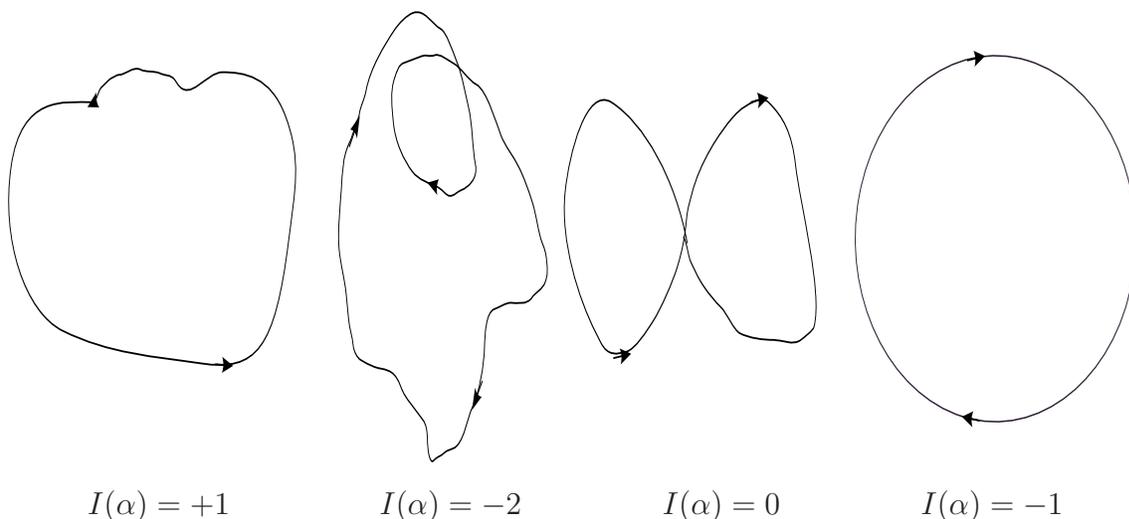


Fig. 2.17

Gemäß Definition (2.42) und (2.43) von der Winkel  $\tilde{\theta}(s)$  für den Tangentenvektor  $t(s)$  und den Hauptnormalenvektor  $n(s)$  (vgl. (2.9)) gilt:

$$t(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))^{\top}, \quad n(s) = (-\sin \theta(s), \cos \theta(s))^{\top}, \quad (2.45)$$

also (vgl. (2.11))

$$t'(s) = (-\sin \theta(s), \cos \theta(s))^{\top} \theta'(s) = \theta'(s)n(s).$$

Andererseits  $t' = \kappa n$  (vgl. Definition 2.21) d.h.

$$\theta'(s) = \kappa_{\alpha}(s). \quad (2.46)$$

Wir erhalten die Integraldarstellung

$$I(\alpha) = \frac{1}{2\pi} [\theta(L) - \theta(0)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(s) ds, \quad (2.47)$$

die man auch zur Definition des ganzzahligen Rotationsindex  $I(\alpha)$  verwenden könnte.

**Theorem 2.37 (Umlaufsatz).** *Der Rotationsindex einer einfach geschlossenen Kurve ist  $\pm 1$ , je nach dem wie die Kurve orientiert ist.*

**Beweis** (nach Heinz Hopf 1935). Es existiert ein Punkt, so dass die Spur von  $\alpha$  ganz auf einer Seite der Tangente in diesem Punkt liegt. In der Tat: es existiert eindeutig bestimmte Kreis die die Kurve  $\alpha$  in mindestens einem Punkt  $p$  berührt (siehe Fig. 2.14). Nach geeigneter Drehung und Verschiebung verschieben wir  $p$  zu 0 (siehe Fig. 2.15) und können annehmen, dass dieser Punkt der Funktionswert  $p = \alpha(0) = \alpha(L)$  ist. Es ist offensichtlich dass der Rotationsindex bleibt invariant (unverändert) bezüglich beschriebene Kurvenwanderungen (folgt unmittelbar von Definition der Rotationsindex).

Auf dem Dreieck

$$\Delta_L := \{(s, t) : 0 \leq s \leq t \leq L\}$$

(siehe Fig. 2.19) betrachten wir die Sehnenabbildung

$$\sigma : \Delta_L \rightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2, \tag{2.48}$$

$$\sigma(s, t) := \begin{cases} \frac{\alpha(t) - \alpha(s)}{|\alpha(t) - \alpha(s)|}, & s < t, t - s \neq L, \\ \alpha'(s), & s = t, \\ -\alpha'(0), & s = 0, t = L \end{cases}$$

(siehe Fig. 2.18). Da  $\alpha$  einfach geschlossen, ist  $\sigma$  wohldefiniert. Außerdem ist  $\sigma$  stetig.

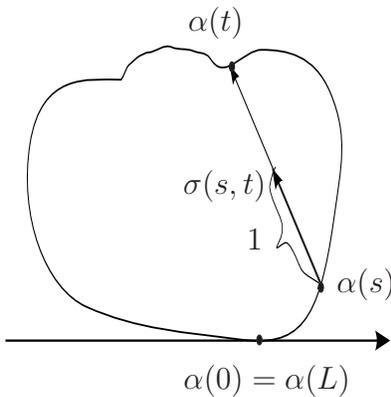


Fig. 2.18

In der tat: da  $|\alpha'(s)| = 1, \alpha(0) = \alpha(L), \alpha'(0) = \alpha'(L)$ ,

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{\alpha(t) - \alpha(s)}{|\alpha(t) - \alpha(s)|} = \lim_{t \downarrow s} \frac{\frac{\alpha(t) - \alpha(s)}{t - s}}{\frac{|\alpha(t) - \alpha(s)|}{|t - s|}} = \frac{\alpha'(s)}{|\alpha'(s)|} = -\alpha'(L).$$

für  $s < t$  und, weil  $\alpha(s) = \alpha(L + s)$  ist  $L$ -periodisch,

$$\lim_{s \downarrow 0} \frac{\alpha(L) - \alpha(s)}{|\alpha(L) - \alpha(s)|} = -\lim_{t \downarrow s} \frac{\frac{\alpha(L) - \alpha(L + s)}{L - (L + s)}}{\frac{|\alpha(L) - \alpha(L + s)|}{|L - (L + s)|}} = -\alpha'(L).$$

Betrachte eine Homotopie  $\tau_t : [0, 1] \rightarrow \Delta_L, 0 \leq t \leq 1$  wobei

$$\tau_t(s) := \begin{cases} L \cdot ((1 - t)s, (1 + t)s)^\top, & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ L \cdot ((1 + t)s - t, (1 - t)s + t)^\top, & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases} \tag{2.49}$$

Insbesondere ist (siehe Fig. 2.20):

$$\tau_0(s) = L \cdot (s, s)^\top = (Ls, Ls)^\top \quad - \quad \text{Diagonalabbildung,}$$

$$\tau_1(s) := \begin{cases} L \cdot (0, 2s)^\top, & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ L \cdot (2s - 1, 1)^\top, & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

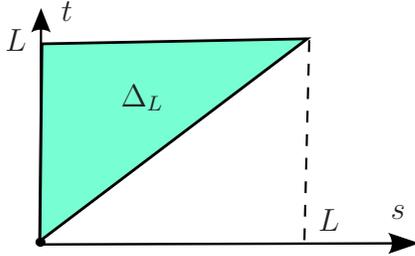


Fig. 2.19

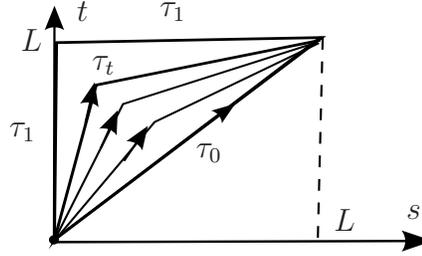


Fig. 2.20

Dann ist  $\tau : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Delta_L$  stetig, und es gilt  $\tau_t(0) = (0, 0)$ ,  $\tau_t(1) = (L, L)$ . Damit ist auch die Verkettung  $\sigma \circ \tau : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  stetig, und es gilt

$$(\sigma \circ \tau_0)(s) = \sigma(Ls, Ls) = \alpha'(Ls) = t_\alpha(Ls). \quad (2.50)$$

Für festes  $t \in [0, 1]$  ist  $\sigma \circ \tau_t : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  stetig mit

$$(\sigma \circ \tau_t)(0) = \sigma(0, 0) = \alpha'(0), \quad (\sigma \circ \tau_t)(1) = \sigma(L, L) = \alpha'(L) = \alpha'(0). \quad (2.51)$$

Nach der Bemerkung 2.36 ist dann der Rotationsindex  $I(\sigma \circ \tau_t)$  wohldefiniert. Da die Abbildung  $I(\sigma \circ \tau_t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{Z}$  stetig ist, folgt  $I(\sigma \circ \tau_t) \equiv \text{const.}$  Also

$$I(\alpha) = I(t_\alpha) = I(\sigma \circ \tau_0) = I(\sigma \circ \tau_1).$$

Berechnung von  $I(\sigma \circ \tau_1)$ : Durchläuft  $s$  das Intervall  $[0, 1/2]$ , so durchläuft

$$\sigma \circ \tau_1(s) = \sigma(0, 2Ls) = \frac{\alpha(2Ls) - \alpha(0)}{|\alpha(2Ls) - \alpha(0)|}$$

die normierten Sehnen vom Punkt  $\alpha(0)$  aus:

$$\sigma \circ \tau_1(0) = \alpha'(0), \quad \sigma \circ \tau_1\left(\frac{1}{2}\right) = -\alpha'(0),$$

wobei  $\sigma \circ \tau_1(s)$  stets in derselben Hälfte von  $\mathbb{S}^1$  bleibt, da  $\alpha$  auf einer Seite der Tangente an  $\alpha(0)$  liegt. Die Änderung des Winkels ist also gleich  $\pi$  oder gleich  $-\pi$  (vgl. Fig. 2.21).

Läuft dann  $s$  von  $1/2$  bis  $1$ , so variiert  $\alpha(0)$

$$\sigma \circ \tau_1(s) = \sigma((2s-1)L, L) = \frac{\alpha(L) - \alpha((2s-1)L)}{|\alpha(L) - \alpha((2s-1)L)|}$$

gerade in der anderen Hälfte von  $\mathbb{S}^1$  mit

$$\sigma \circ \tau_1\left(\frac{1}{2}\right) = \sigma(0, L) = -\alpha'(0), \quad \sigma \circ \tau_1(1) = \sigma(L, L) = \alpha'(0).$$

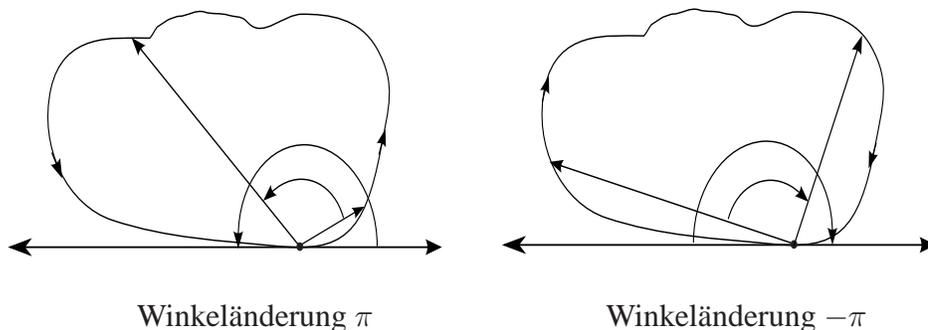


Fig. 2.21

Die Änderung des Winkels ist wiederum gleich  $\pi$  oder gleich  $-\pi$ ; insgesamt also gleich  $2\pi$  (positiv orientierte Kurve) oder gleich  $-2\pi$  (negativ orientierte Kurve; vgl. Fig. 2.21). Damit ist  $I(\alpha) = \pm 1$ . ■

**Korollar 2.38** *Es sei  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine einfach geschlossene reguläre ebene Kurve der Länge  $L = L_\alpha$ , mit Krümmung  $\kappa_\alpha$ . Dann gilt:*

i. *Die Totalkrümmung ist  $\pm 2\pi$ :*

$$\int_0^{L_\alpha} \kappa_\alpha(s) ds = \pm 2\pi. \quad (2.52)$$

ii. *Ist  $\max_{t \in I} |\kappa_\alpha(t)| \leq \frac{1}{r}$ , so ist  $L_\alpha \geq 2\pi r$ .*

iii. *Ist  $\min_{t \in I} |\kappa_\alpha(t)| \geq \frac{1}{r} > 0$ , so ist  $L_\alpha \leq 2\pi r$ .*

iv. *Es ist  $\max_{t \in I} |\kappa_\alpha(t)| \geq \frac{2\pi}{L_\alpha}$ .*

**Beweis:** (i) Folgt unmittelbar aus Formel (2.47) und Theorem 2.37.

$$(ii) \quad 2\pi = \left| \int_0^{L_\alpha} \kappa_\alpha(s) ds \right| \leq \int_0^{L_\alpha} |\kappa_\alpha(s)| ds \leq \frac{L_\alpha}{r}.$$

(iii) Ist  $\min_{t \in I} |\kappa_\alpha(t)| \geq \frac{1}{r} > 0$ , so hat  $\kappa_\alpha$  ein bestimmtes Vorzeichen und dieses Vorzeichen ändert sich nicht, weil  $\kappa_\alpha$  stetig ist und nicht verschwindet; also

$$2\pi = \left| \int_0^{L_\alpha} \kappa_\alpha(s) ds \right| = \int_0^{L_\alpha} |\kappa_\alpha(s)| ds \geq \frac{L_\alpha}{r}.$$

(iv) Wäre  $\max_{t \in I} |\kappa_\alpha(t)| \leq (1 - \delta) \frac{2\pi}{L_\alpha}$ , so folgt aus (ii)

$$L_\alpha \geq 2\pi \frac{L_\alpha}{(1 - \delta)2\pi} = \frac{1}{1 - \delta} L_\alpha > L_\alpha,$$

ein Widerspruch! ■

**Definition 2.39** Eine reguläre ebene Kurve  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  heißt *konvex*, falls gilt: Für jedes  $t_0 \in I$  liegt Spur  $\alpha$  ganz auf einer Seite der Tangente durch  $\alpha(t_0)$ , d.h.

entweder  $[\alpha(t) - \alpha(t_0)] \cdot n_\alpha(t_0) \geq 0$  oder  $[\alpha(t) - \alpha(t_0)] \cdot n_\alpha(t_0) \leq 0 \quad \forall t, t_0 \in I$ ,

wobei  $n_\alpha$  den Normalenvektor zu  $\alpha$  bezeichnet (vgl. Fig. 2.22).

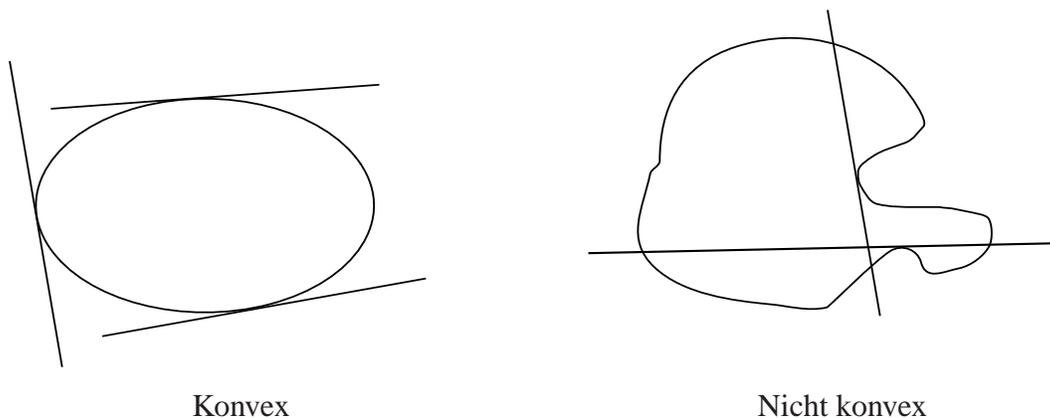


Fig. 2.22

**Theorem 2.40 (Charakterisierung konvexer Kurven).** Es sei  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine einfach geschlossene reguläre Kurve. Dann gilt:  $\alpha$  ist genau dann konvex, wenn das Vorzeichen<sup>(1)</sup>  $\text{sign } \kappa_\alpha(t)$  sich nicht ändert d.h., entweder  $\kappa_\alpha(t) \geq 0$  oder  $\kappa_\alpha(t) \leq 0$  für alle  $t \in I$ .

**Beweis:** Ohne Einschränkung sei  $\alpha : [0, L) \rightarrow \mathbb{R}^2$  nach Bogenlänge parametrisiert.

<sup>(1)</sup>Wir nehmen an, dass  $\text{sign } \kappa_\alpha(t) = 0$  für  $\kappa_\alpha(t) = 0$

Sei  $\alpha$  konvex. Zu festem  $s_0 \in I$  betrachte die Taylor-Entwicklung von  $\alpha$  in  $s_0$ :

$$\alpha(s) - \alpha(s_0) = (s - s_0)t(s_0) + \frac{1}{2}(s - s_0)^2\kappa(s_0)n(s_0) + R(s), \quad (2.53)$$

$$R(s) = \mathcal{O}((s - s_0)^2),$$

wobei die Notation  $R(s) = \mathcal{O}((s - s_0)^k)$  bedeutet:  $\lim_{s \rightarrow s_0} (s - s_0)^{-k} R(s) = 0$ . Ist dann  $(\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot n(s_0) \geq 0$  für alle  $s \in I$ , so multiplizieren wir die Gleichung (2.53) skalar mit  $(s - s_0)^{-2}n(s)$  und, wegen Gleichungen  $t(s) \cdot n(s) = 0$ ,  $n(s) \cdot n(s) = 1$ , bekommen:

$$\frac{1}{2}\kappa(s_0) + \mathcal{O}(1) \geq 0;$$

also  $\kappa(s_0) \geq 0$ .

Analog für  $(\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot n(s_0) \leq 0$ .

Sei  $\kappa(s) \geq 0$  für alle  $s \in I$ . Ist  $\alpha$  nicht konvex, so gibt es  $s_0 \in I = [0, L]$ , so dass

$$\varphi(s) := [\alpha(s) - \alpha(s_0)] \cdot n(s_0) \quad (2.54)$$

in  $s_0$  das Vorzeichen wechselt. Da der Fall  $\varphi \equiv 0$  ausgeschlossen ist (sonst Spur  $\alpha$  eine Teilmenge einer Gerade ist und deshalb nicht geschlossen), es existieren  $s_- \neq s_+$  Stellen, an denen  $\varphi$  sein Minimum bzw. sein Maximum annimmt und folgendes gilt:

$$\varphi(s_-) < \varphi(s_0) = 0 < \varphi(s_+), \quad \varphi'(s_-) = \varphi'(s_+) = 0 \quad (2.55)$$

Es könnte entweder  $s_- = 0$  oder  $s_+ = L$  der Endpunkte sein, aber nie gleichzeitig, da Spur  $\alpha$  geschlossen ist und deswegen  $\varphi(0) = \varphi(L)$  so wie  $\varphi'(0) = \varphi'(L)$ .

Wegen (2.54)  $\varphi'(s_0) = \alpha'(s_0) \cdot n(s_0) = t(s_0) \cdot n(s_0) = 0$  und wegen (2.54) mit (2.55)  $0 = \varphi'(s_\pm) = \alpha'(s_\pm) \cdot n(s_0) = t(s_\pm) \cdot n(s_0)$ . Davon folgt

$$t(s_0) = \alpha'(s_0) \perp n(s_0), \quad t(s_\pm) = \alpha'(s_\pm) \perp n(s_0).$$

Dann

$$t(s) = \pm t(s_0) \quad \text{für } s \in \{s_-, s_+, s_0\}.$$

Insbesondere gibt es  $s_1, s_2 \in \{s_-, s_+, s_0\}$ ,  $s_1 \neq s_2$  mit

$$t(s_1) = t(s_2), \quad s_1 < s_2. \quad (2.56)$$

Nach Umparametrisierung wir können annehmen dass  $s_1 = 0 < s_2 < L$ . Setze

$$\theta(s) := \int_0^s \kappa(\sigma) d\sigma.$$

Weil am Punkten  $s = s_1 = 0$ ,  $s = s_2$  und  $s = L$  die Winkel  $\theta(s)$  modulo  $2\pi$  die gleiche Werte erreicht (vgl. (2.56) und merke das  $t(0) = t(L)$ ), erhalten wir für geeignete ganzen Zahlen  $k, \tilde{k} \in \mathbb{Z}$  die Gleichungen

$$\theta(s_2) - \theta(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} \kappa(\sigma) d\sigma = 2\pi k, \quad \theta(L) - \theta(s_2) = \int_{s_2}^L \kappa(\sigma) d\sigma = 2\pi \tilde{k}.$$

Andererseits, weil  $s_1 = 0$  und  $[0, L) = [s_1, s_2) \cup [s_2, L)$  folgt aus dem Umlaufsatz 2.37

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(\sigma) d\sigma = \int_{s_1}^{s_2} \kappa(\sigma) d\sigma \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{s_2}^L \kappa(\sigma) d\sigma = k + \tilde{k}.$$

Aus  $\kappa(s) \geq 0$  folgt  $k, \tilde{k} \geq 0$ . Also muss entweder  $k = 0$  oder  $\tilde{k} = 0$  sein. Nehmen wir an  $k = 0$ ; da  $\kappa(s) \geq 0$  gilt dann  $\kappa|_{[s_1, s_2]} \equiv 0$  und folglich  $\alpha''|_{[s_1, s_2]} \equiv 0$ . Damit ist Spur  $\alpha|_{[s_1, s_2]}$  Teil einer Gerade, die gleichzeitig die Tangente an  $\alpha(s_1), \alpha(s_2)$  ist.

Betrachten wir der Fall  $s_1 = s_0$  oder  $s_2 = s_0$ . Dann die Gleichung  $\varphi(s_1) = \varphi(s_2) = 0$  widerspricht (2.55).

Gilt andererseits  $s_1 = s_-, s_2 = s_+$ , so folgt  $\alpha(s_-) - \alpha(s_+) = c \cdot t(s_0)$ ,  $c \in \mathbb{R}$  und

$$\begin{aligned} 0 > \varphi(s_-) &= [\alpha(s_-) - \alpha(s_0)] \cdot n(s_0) \\ &= [\alpha(s_+) - \alpha(s_0)] \cdot n(s_0) + [\alpha(s_-) - \alpha(s_+)] \cdot n(s_0) \\ &= \varphi(s_+) + c \cdot t(s_0) \cdot n(s_0) = \varphi(s_+) > 0 \end{aligned}$$

(vgl. mit (2.54)). Ein weiterer Widerspruch!

Analog für  $\kappa(s) \leq 0$  für alle  $s \in I$ . ■

Ist die Krümmung einer einfach geschlossenen ebenen Kurve beliebig, so gilt immer noch der folgende Satz (ein tiefer topologischer Satz, der deshalb ohne Beweis angeführt wird!).

**Satz 2.41 (Jordansche Kurvensatz).** Sei  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $I = [a, b)$  einfache ( $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$  für alle  $t_1 \neq t_2$ ,  $t_1, t_2 \in I$ ), geschlossene ( $\alpha(a) = \alpha(b)$ ) und stetige ( $\alpha \in C(I)$ ) Kurve.

Dann ist Spur  $\alpha$  der Rand eines einfach zusammenhängenden Gebiets, d.h.  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Spur } \alpha$  hat genau zwei Zusammenhangskomponenten, eine unbeschränkte und eine beschränkte, das Außengebiet und das Innengebiet. ■

**Definition 2.42** Ein **Scheitel** einer regulären ebenen Kurve  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist ein Punkt aus  $I$ , in dem die Krümmung  $\kappa_\alpha$  ein (relatives) Extremum besitzt.

**Theorem 2.43 (Vier-Scheitel-Satz; Four Vertex Theorem).** Eine einfach geschlossene reguläre konvexe glatte  $\alpha \in C^3(I)$  ebene Kurve besitzt mindestens vier Scheitel.

**Beweis** (nach Gustav Herglotz, 1913).

A.  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $I$  kompakt. Die stetige Funktion  $\kappa_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  nimmt ihr absolutes Maximum und ihr absolutes Minimum an, also gibt es mindestens zwei Scheitel.

B. Nehmen wir an, dass die Kurve nach Bogenlänge parametrisiert ist:  $|\alpha'| \equiv 1$ ,  $\alpha : [0, L) \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Die Verbindungsgerade zwischen dem absoluten Maximum  $\alpha(s_{\max})$  und dem absoluten Minimum  $\alpha(s_{\min})$  sei die x-Achse (siehe Fig. 2.23).

Dann hat die  $x$ -Achse keine weiteren Punkte mit Spur  $\alpha$  gemein. Gäbe es einen dritten Schnittpunkt, so müsste die Tangente an dem mittleren der drei Punkte die  $x$ -Achse sein.

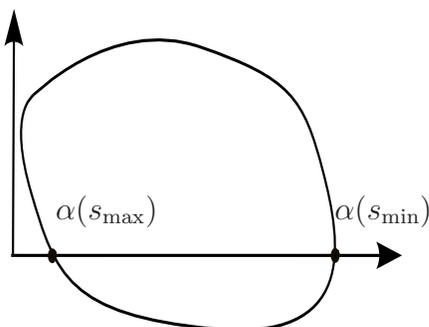


Fig. 2.23

Dies ist in der Tat der Fall, denn andernfalls, wenn die Tangente die  $x$ -Achse nur in einem Punkt schneidet, liegen mindestens zwei Punkte  $\alpha(s_{\max})$  und  $\alpha(s_{\min})$  der Spur von  $\alpha$  auf verschiedenen Seite dieser Tangente, was der Konvexität widerspricht.

Damit liegt Spur  $\alpha$  ganz auf einer Seite der Tangente, also ober oder unterhalb der  $x$ -Achse. Nehmen wir an, dass  $\alpha$  die  $x$ -Achse verläßt. Dann gäbe es aber dort eine Tangente an  $\alpha$ , die die  $x$ -Achse schneidet (wegen der vorausgesetzten Glattheit der Kurve). Dies widerspricht aber auch der Konvexität und damit tritt auch dieser Fall nicht ein.

Wäre die Verbindungsstrecke (d.h. ein Teil von Spur  $\alpha$ ) ein Teil der  $x$ -Achse, so folgt  $\kappa'(s) \equiv 0$  und es existieren mehr als vier Scheitel.

C. Also, schneidet die  $x$ -Achse  $\alpha$  nur in den Punkten  $s_{\min} = 0, s_{\max}$ , in denen  $\kappa(s)$  sein absolutes Extremum erreicht. Weiter nehmen wir ohne Einschränkung an, dass  $\kappa(s)$  sein absolutes Minimum im Nullpunkt annimmt:  $s_{\min} = 0$  und  $\kappa(0) = \min \kappa(s)$ . Dann erreicht  $\kappa(s)$  sein absolutes Maximum im offenen Intervall  $(0, L)$ :  $0 < s_{\max} < L$ . Besitzt  $\alpha$  nur diese zwei Scheitel, so ist  $\kappa' \geq 0$  auf  $[0, s_{\max}]$  und  $\kappa' \leq 0$  auf  $[s_{\max}, L]$ . Es folgt

$$\alpha(s) := (x(s), y(s))^{\top}, \quad \kappa'(s)y(s) \geq 0 \quad \text{für alle } s \in [0, L] \quad (2.57)$$

(da die  $x$ -Achse das Intervall  $I_0 := [s_{\min}, s_{\max}]$  enthält, wechselt  $y(s)$  das Vorzeichen auf  $I_0$  und auf  $[0, L] \setminus I_0$  nicht). Mit  $t(s) = (x'(s), y'(s))^{\top}$ ,  $n(s) = (-y'(s), x'(s))^{\top}$  und  $t' = \kappa n$  folgt  $x'' = -\kappa y'$ , also mit (2.57) und durch partielle Integration

$$0 \leq \int_0^L \kappa'(s)y(s) ds = - \int_0^L \kappa(s)y'(s) ds = \int_0^L x''(s) ds = x'(L) - x'(0) = 0.$$

Das aber impliziert  $\kappa'y \equiv 0$ , also  $\kappa' \equiv 0$  und  $\kappa \equiv \text{const.}$ ; dann ist  $\alpha$  ein Kreis und die Behauptung ist bewiesen.

Andernfalls besitzt  $\alpha$  mindestens drei Scheitel.

D. Wenn aber drei Scheitel existieren, so auch vier, da Maximum- und Minimum-Stellen sich abwechseln. ■

**Bemerkung 2.44 (i)** Der Satz ist auch richtig ohne Konvexität! Der Beweis ist etwas schwieriger (L. Vietoris, Archiv der Math. 3 (1952), 304306).

(ii) Bei einer Ellipse, die kein Kreis ist, gibt es genau vier Scheitel (vgl. Übung 2.1)!

(iii) Es gibt nicht-einfache geschlossene reguläre ebene Kurven mit nur zwei Scheiteln (vgl. Fig. 2.24).

(iv) Es gibt Kurven (mit Ecken und Spitzen), die in den glatten Teilen überhaupt keine Scheitel haben (vgl. Fig. 2.25).

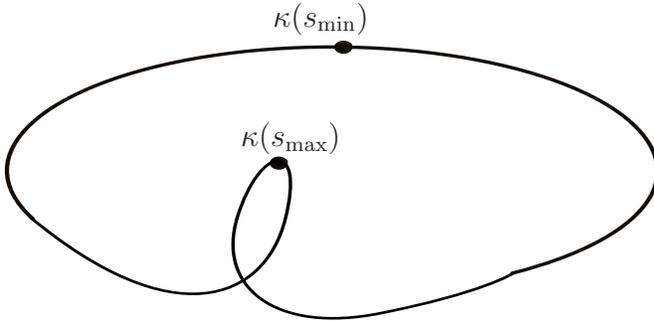


Fig. 2.24

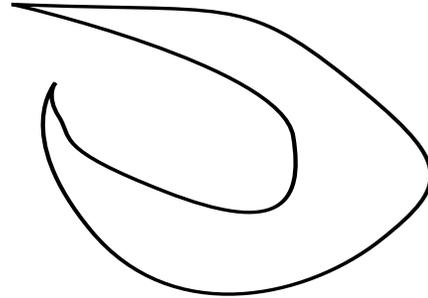


Fig. 2.25

Zum Abschluss der Kurventheorie ein weiterer globaler Satz.

**Theorem 2.45 (Die Isoperimetrische Ungleichung).** Es sei  $C$  eine einfach geschlossene ebene Kurve der Länge  $L$ ,  $A$  sei der Flächeninhalt des von  $C$  eingeschlossenen Gebiets. Dann gilt

$$L^2 \geq 4\pi A \tag{2.58}$$

mit Gleichheit nur für Kreise.

Zum Beweis benötigen wir eine Formel für den Flächeninhalt.

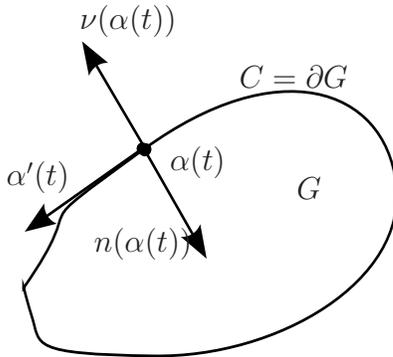


Fig. 2.26

**Lemma 2.46** Es sei  $\alpha = (x, y)^T : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ , die glatte Kurve  $x, y \in C^1(I)$ , mit Spur  $C$  und  $G$  sei das von  $C = \partial G$  berandete Innengebiet. Die Kurve  $C = \partial G$  sei positiv orientiert und  $\nu(\zeta)$  sei die äußere Einheitsnormale an  $\zeta \in \partial G$  (siehe Fig. 2.26).

Der Flächeninhalt  $A(G)$  des Innengebiets ist mit den folgenden Formeln zu berechnen:

$$\begin{aligned} A(G) &= \int_a^b x(t)y'(t) dt = - \int_a^b x'(t)y(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b [x(t)y'(t) - x'(t)y(t)] dt. \end{aligned} \tag{2.59}$$

**Beweis:** Wir wenden den **Gaußschen Satz** an: Ist  $v = (v_1, v_2)^T$  ein  $C^1$ -Vektorfeld auf  $G$ , so

gilt:

$$\int_G \operatorname{div} v \, dG = \int_{\partial G} v(t) \cdot \nu(t) \, d\sigma, \quad (2.60)$$

wobei  $\operatorname{div} v := \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2$  die Divergenz ist,  $dG = dx \, dy$  und  $d\sigma = |\alpha'(t)| \, dt$  bezeichnen das entsprechende Flächenelement auf  $G$  und  $C = \partial G$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_G \operatorname{div} v \, dG &= \int_{\partial G} \left[ \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right] dx \, dy = \int_a^b v(\alpha(t)) \cdot [-n(\alpha(t))] |\alpha'(t)| \, dt \\ &= \int_a^b [v_1(\alpha(t))y'(t) - x'(t)v_2(\alpha(t))] \, dt, \end{aligned} \quad (2.61)$$

weil die äußere Einheitsnormale

$$\nu(t) = -n(t), \quad -|\alpha'(t)|n(\alpha(t)) = D_+^{90^\circ} \alpha'(t) = (y'(t), -x'(t))^\top$$

eine  $90^\circ$  Drehung in negativer Richtung (im Uhrzeigersinn) von Tangente  $\alpha'(t)$  darstellt (vgl. Fig. 2.26).

Einsetzen von  $v = (x, 0)^\top$  bzw.  $v = (0, y)^\top$  bzw.  $v = \frac{1}{2}(x, y)^\top$  in (2.61) liefert die Formel (2.59), da  $\operatorname{div} v \equiv 1$  und  $\int_G dG = A(G)$ . ■

**Beweis von Theorem 2.45** (nach Erhard Schmidt 1939):

Betrachte einen Streifen orthogonal zu einem Durchmesser von Spur  $C$  (vgl. Fig. 2.27) und parametrisiere  $C$  durch  $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  nach der Bogenlänge  $\alpha(s) = (x(s), y(s))^\top$ . Nach Umparametrisierung ist  $\alpha(0) - \alpha(\ell)$  der Durchmesser, wobei  $\alpha(0) = (r, 0)$ ,  $\alpha(\ell) = (-r, 0)$ ,  $0 < \ell < L$ .

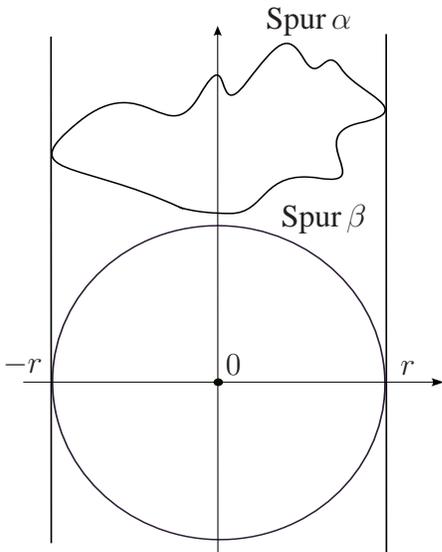


Fig. 2.27

Parametrisiere außerdem einen Kreis von Radius  $r$  durch (wir nehmen an, dass Kreiszentrum der Nullpunkt ist)

$$\beta(s) := \left( x(s), \pm \sqrt{r^2 - x^2(s)} \right)^\top \quad (2.62)$$

mit Gleichem  $x(s)$  als in  $\alpha(s)$  und wobei das Vorzeichen “+” für  $0 \leq s \leq \ell$  und das Vorzeichen “-” für  $\ell \leq s \leq L$  stehen.

Beachte, dass  $\beta$  i.a. nicht injektiv und nicht regulär ist. Für den Flächeninhalt  $A(G)$  des Innengebiets  $G = G_\alpha$  von  $\alpha$  folgt

$$A(G_\alpha) = \int_0^L x(s)y'(s) \, ds, \quad (2.63)$$

und für des Innengebiets  $G_\beta$  des Kreises erhält man

$$A(G_\beta) := - \int_0^\ell \beta_1'(s)\beta_2(s) \, ds = - \int_0^\ell x'(s)\sqrt{r^2 - x^2(s)} \, ds + \int_\ell^L x'(s)\sqrt{r^2 - x^2(s)} \, ds.$$

Mit  $u = x(s)$  erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}
 A(G_\beta) &= - \int_0^L \beta_1'(s) \beta_2(s) ds \\
 &= - \int_r^{-r} \sqrt{r^2 - u^2} du - \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - u^2} du = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - u^2} du \\
 &= 2r^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} dt = \pi r^2.
 \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
 A(G_\alpha) + A(G_\beta) &= A(G_\alpha) + \pi r^2 = \int_0^L [x(s)y'(s) - \beta_1'(s)\beta_2(s)] ds \\
 &= \int_0^L (x(s), \beta_2(s))^\top \cdot (y'(s), -\beta_1'(s))^\top ds \\
 &\leq \int_0^L |(\beta_1(s), \beta_2(s))^\top| |(y'(s), -x'(s))^\top| ds \\
 &= \int_0^L \underbrace{\sqrt{\beta_1^2(s) + \beta_2^2(s)}}_{=r} \underbrace{\sqrt{(y'(s))^2 + (x'(s))^2}}_{=1} ds \\
 &= Lr.
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

Die wohlbekannte AGM-Ungleichung liefert

$$\sqrt{A(G_\alpha)\pi r^2} \leq \frac{1}{2}A(G_\alpha) + \frac{1}{2}\pi r^2 \leq \frac{1}{2}Lr \tag{2.65}$$

und daraus

$$A(G_\alpha)\pi r^2 \leq \frac{1}{4}L^2 r^2 \Leftrightarrow L^2 \geq 4\pi A(G_\alpha).$$

Gleichheit tritt genau dann ein, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1.  $A(G_\alpha) = \pi r^2$  (Gleichung in (2.65));
2.  $(x(s), \beta_2(s))^\top$  und  $(y'(s), -\beta_1'(s))^\top$  positiv linear abhängig (Gleichung in (2.64)).

Wegen

$$(x(s), \beta_2(s))^\top = (\beta_1(s), \beta_2(s))^\top = -rn_{\beta(s)}$$

und

$$(y'(s), -\beta_1'(s))^\top = (y'(s), -x'(s))^\top = -n_{\alpha(s)}$$

bedeutet dies  $n_\beta = n_\alpha \Rightarrow \beta' = t_\beta = t_\alpha = \alpha'$ , und somit (nach Integration)

$$\beta(s) = \alpha(s) \quad \text{sobald, nach Verschiebung,} \quad \beta(0) = \alpha(0) = (r, 0). \quad \blacksquare$$

## ÜBUNGEN

**Übung 2.1** Seien  $a, b > 0$ . Die Kurve

$$\alpha(\theta) = (a \cos \theta, b \sin \theta)^\top, \quad 0 < a \leq b, \quad \alpha : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

heißt Ellipse, die beiden Punkte  $F_\pm = (\pm \sqrt{a^2 - b^2}, 0)^\top$  sind ihre Brennpunkte.

1. Berechnen Sie die Krümmung der Ellipse.
2. Bestimmen Sie die vier Scheitelpunkte der Ellipse.
3. Berechnen Sie mit der Formel (2.59) den Flächeninhalt des Innengebiets der Ellipse.
4. Zeigen Sie, dass die Summe der Abstände zu den Brennpunkten konstant ist, und zwar

$$|c(t) - F_+| + |c(t) - F_-| = 2a.$$

Hierauf beruht die sogenannte Gärtnerkonstruktion, die eine Ellipse durch einen Faden mit Endpunkten  $F_\pm$  erzeugt.

5. Rechnen Sie nach, dass die Winkel zwischen der Kurventangente und den Brennstrahlen konstant sind, d.h.  $\sphericalangle(c(t) - F_+, -c'(t)) = \sphericalangle(c(t) - F_-, c'(t))$ . Daher werden von  $F_+$  ausgehende Lichtstrahlen an der Ellipse nach  $F_-$  reflektiert. Spiegelt man  $F_-$  an allen Tangenten, so erhält man einen Kreis vom Radius  $2a$  um  $F_+$ , den Leitkreis.
6. Zeigen Sie, dass der kleinste Krümmungskreis an die Ellipse innerhalb, der größte außerhalb der Menge  $\left\{ (x, y)^\top : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$  liegt.

**Übung 2.2** Betrachten Sie die Raumkurve

$$\alpha(t) = (ae^{-bt} \cos t, ae^{-bt} \sin t, e^{-bt})^\top, \quad \alpha : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

- a. Ist  $\alpha$  eine reguläre Kurve?
- b. Berechnen Sie  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t)$  und skizzieren Sie die Projektion der Kurve auf die  $(x^1, x^2)$  Ebene.
- c. Zeigen Sie, dass  $\alpha$  endliche Bogenlänge auf  $[0, \infty)$  hat.
- d. Parametrisieren Sie die Kurve nach Bogenlänge.

**Übung 2.3** Berechnen Sie das Frenetsche Dreibein sowie die Krümmung und die Torsion von die Raumkurve

$$\alpha(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t, e^{-t})^\top, \quad \alpha : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

**Übung 2.4** Eine Abbildung  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt *Kurve der Klasse  $C^k$* , wenn jede der Koordinatenfunktionen in dem Ausdruck  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))^\top$  stetige Ableitungen bis zur Ordnung  $k$  besitzt. Falls  $\alpha$  nur stetig ist, sagen wir  $\alpha$  ist von der Klasse  $C^0$ . Eine Kurve  $\alpha$  heißt *einfach*, wenn die Abbildung  $\alpha$  injektiv ist.

Sei  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine einfache Kurve der Klasse  $C^0$ . Wir sagen, dass  $\alpha$  eine *schwache Tangente* bei  $t = t_0 \in I$  besitzt, wenn die durch  $\alpha(t_0)$  und  $\alpha(t_0 + h)$  bestimmte Gerade eine *Grenzlage* besitzt bei  $h \rightarrow 0$ . Wir sagen  $\alpha$  hat eine *starke Tangente* bei  $t = t_0$ , falls die durch  $\alpha(t_0 + h)$  und  $\alpha(t_0 + k)$  bestimmte Gerade eine *Grenzlage* besitzt bei  $h, k \rightarrow 0$ .

Zeigen Sie:

1.  $\alpha(t) = (t^3, t^2)^\top$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , hat eine schwache aber keine starke Tangente in  $t = 0$ .
2. Ist  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  von der Klasse  $C^1$  und regulär in  $t = t_0$ , so besitzt  $\alpha$  eine starke Tangente bei  $t = t_0$ .
3. Die durch  $\alpha(t) = (t^2, t^2)^\top$  für  $t \geq 0$  und durch  $\alpha(t) = (t^2, -t^2)^\top$  für  $t < 0$  gegebene Kurve ist von der Klasse  $C^1$  aber nicht von der Klasse  $C^2$ . Skizzieren Sie die Kurve und ihre Tangentenvektoren. In welchen Punkten existiert eine starke bzw. schwache Tangente?

**Übung 2.5** Parametrisieren Sie die Kurve (Helix)

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)^\top, \quad t \in \mathbb{R}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

nach Bogenlänge.

1. Bestimmen Sie Krümmung und Torsion von  $\alpha$ .
2. Bestimmen Sie die Schmiegebene von  $\alpha$ .
3. Zeigen Sie, dass die Geraden, die  $n(s)$  enthalten und durch  $\alpha(s)$  gehen, die  $z$ -Achse unter dem konstanten Winkel  $\pi/2$  schneiden.
4. Zeigen Sie, dass die Tangenten einen konstanten Winkel mit der  $z$ -Achse bilden.

**Übung 2.6** Es sei  $a > 0$  und  $I = [-a, a]$ .

A. Parametrisieren Sie die Kurve

$$\alpha(t) := (t, \cosh t)^\top, \quad \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$$

nach Bogenlänge.

B. Berechnen Sie die Krümmung  $\kappa_\alpha$  und die Torsion  $\tau_\alpha$  von  $\alpha$ .

**Übung 2.7** Berechnen Sie die Krümmung und die Torsion folgender Raumkurve mit der Formel (2.20) und (2.21):

$$\alpha(t) := (t \cos t, t^2, e^t)^\top, \quad \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

**Übung 2.8** Sei  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine reguläre Kurve mit  $\alpha''$  stets ungleich 0 und sei  $S \in SO(3)$  (eine orthogonale Matrix, das heißt  $S^\top = S^{-1}$  ist die Inverse). Zeigen Sie, dass die Kurven  $\alpha$  und alle eigentlichen Bewegungen ( $A\alpha + c$ ,  $c \in \mathbb{R}^3$ ) dieselben Krümmungen und Torsionen haben.

**Übung 2.9** Sei  $\alpha : (0, \pi) \mapsto \mathbb{R}^2$  die Traktrix (siehe Beispiel 1.7).

1. In  $\mathbb{R}^2$  wird ein Punkt  $T(1, 0)$  durch ein straff gespanntes Seil mit einem Zugpunkt  $E(0, 0)$  verbunden. Zeigen Sie, dass der Punkt  $T$  eine Traktrix beschreibt, wenn man  $E$  in  $y$ -Richtung bewegt, (daher wird die Traktrix auch als Schleppkurve bezeichnet).
2. Zeigen Sie, dass die Traktrix auch diejenige Kurve durch  $T(1, 0)$  ist, die auf allen Translationen des Einheitskreises  $S^1 = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  in Richtung der positiven  $y$ -Achse senkrecht steht.

**Übung 2.10** Sei  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine reguläre parametrisierte ebene Kurve mit orientierter Krümmung  $\kappa(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$ . Die Kurve

$$\beta(t) := \alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)}n(t), \quad t \in I,$$

heißt die Evolute von  $\alpha$ .

1. Zeigen Sie, dass die Tangente an die Evolute von  $\alpha$  bei  $t$  normal ist zu  $\alpha$  bei  $t$ .
2. Betrachten Sie die Normalen zu  $\alpha$  in zwei benachbarten Punkten  $t_1, t_2$  mit  $t_1 \neq t_2$ . Zeigen Sie, dass für  $t_1 \rightarrow t_2$  die Schnittpunkte der Normalen gegen einen Punkt auf der Spur der Evolute von  $\alpha$  konvergieren.
3. Berechnen Sie die Evolute der Kettenlinie

$$\alpha(t) = (t, \cosh t)^\top, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Übung 2.11** Zeigen Sie, dass für gegebene Krümmung  $\kappa : [0, L) \rightarrow \mathbb{R}$  alle zugehörigen ebenen Kurven durch

$$\alpha(s) := \left( \int_0^s \cos \theta(t) dt + a, \int_0^s \sin \theta(t) dt + b \right)^\top$$

gegeben sind mit

$$\theta(s) := \int_0^s \kappa(t) dt + \varphi$$

und dass die Kurve bestimmt ist bis auf eine Translation des Vektors  $(a, b)^\top$  und eine Drehung des Winkels  $\varphi$ .

**Übung 2.12** Sei  $\alpha_s$  für  $s \in \mathbb{R}$  die Kurvenschar  $\alpha_s(t) := (3 \cos t + s \cos 3t, 3 \sin t + s \sin 3t)^\top$ .

1. Skizzieren Sie die Kurven  $\alpha_0$  und  $\alpha_5$ .
2. Für welche  $s$  ist die Kurve  $\alpha_s$  regulär parametrisiert?
3. Berechnen Sie die Krümmung der regulären  $\alpha_s$ .

**Übung 2.13** Es sei  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine geschlossene konvexe ebene Kurve, die positiv orientiert ist. Die Kurve  $\beta(s) = \alpha(s) - rn(s)$ , wobei  $r$  eine positive Konstante und  $n$  der Normalenvektor ist, heißt eine Parallelkurve zu  $\alpha$ . Zeigen Sie:

1.  $L(\beta) = L(\alpha) + 2\pi r$ ;
2.  $A(\beta) = A(\alpha) + rl + \pi r^2$ ;
3.  $\kappa_\beta(s) = \kappa_\alpha(s)/(1 + r\kappa_\alpha(s))$ .

Dabei bezeichnet  $L(\cdot)$  bzw.  $A(\cdot)$  die Länge der entsprechenden Kurve bzw. den von ihr eingeschlossenen Flächeninhalt und  $\kappa_\alpha$  bzw.  $\kappa_\beta$  die jeweilige Krümmung der Kurve.

**Übung 2.14** Zeigen Sie, dass eine einfach geschlossene glatte Kurve  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  zu jedem Einheitsvektor  $v_0 \in \mathbb{R}^2$ ,  $|v_0| = 1$  mindestens ein  $s_0 \in I$  mit  $n(s_0) = v_0$  besitzt.

Beweisen Sie, dass für den Fall einer strikt konvexer Kurve nur ein eindeutig bestimmtes  $s_0 \in I$  mit  $n(s_0) = v_0$  existiert.

**Übung 2.15** Es sei  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $I = [a, b) \subset \mathbb{R}$ , die glatte Kurve  $x, y \in C^1(I)$ , mit dem Spur  $C$  und  $G$  sei das von  $C = \partial G$  berandete Innengebiet.  $n(\zeta)$  sei die innere Einheitsnormale an  $\zeta \in \partial G$ .

Beweise die folgende Formel für der Flächeninhalt  $A(G)$  des Innengebiets:

$$A(G) = \int_a^b \alpha(t) \cdot n(t) dt. \quad (2.66)$$

**Hinweis:** Wende Gaußschen Formel (2.60) an.

**Übung 2.16** Eine einfach geschlossene glatte konvexe Kurve  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\kappa(s) \neq 0 \forall s \in I$  heißt Eilinie.

1. Es sei  $\theta(s) \in [0, 2\pi]$  der Winkel zwischen dem Normalenvektor und der  $x_1$ -Richtung. Ist es möglich die Kurve als Funktion dieses Winkels umzuparametrisieren?
2. Eine Eilinie hat konstante Breite  $b$ , falls für die Stützfunktion  $h(\theta) := -\alpha(\theta) \cdot n(\theta)$  gilt

$$h(\theta) + h(\theta + \pi) = b = \text{const} \quad \text{für } \theta \in [0, \pi).$$

Zeigen Sie: Eine Eilinie konstanter Breite  $b$  hat den Umfang  $\pi b$ .

**Hinweis:** Stellen Sie  $\alpha(\theta)$  als Funktion von  $h$  und  $n$  dar.

**Übung 2.17** Sei  $0A = 2a$  der Durchmesser eines Kreises  $S^1$  und  $0Y$  bzw.  $AV$  seien die Tangenten an  $S^1$  in  $0$  bzw.  $A$ . Eine Halbgerade  $r$  von  $0$  aus treffe den Kreis  $S^1$  in  $C$  und die Gerade  $AV$  in  $B$ . Auf  $0B$  betrachten wir den Abschnitt  $0p = CB$ . Wenn wir  $r$  um  $0$  rotieren, beschreibt der Punkt  $p$  eine Kurve, genannt Kissoide des Diocles. Nehmen Sie  $0A$  als  $x$ -Achse und  $0Y$  als  $y$ -Achse.

1. Zeichnen Sie ein Bild und beweisen Sie, dass die Spur von

$$\alpha(t) = \left( \frac{2at^2}{1+t^2}, \frac{2at^3}{1+t^2} \right), \quad t \in \mathbb{R},$$

die Kissoide des Diocles ist.

2. Zeigen Sie, dass der Ursprung  $(0, 0)$  ein singulärer Punkt der Kissoide ist.
3. Bei  $t \rightarrow \infty$  approximiert  $\alpha(t)$  die Gerade  $x = 2a$  und  $\alpha'(t) \rightarrow (0, 2a)$ . Deshalb approximieren die Kurve und ihre Tangente die Gerade  $x = 2a$  bei  $t \rightarrow \infty$ ; wir nennen  $x = 2a$  eine Asymptote an die Kissoide.

**Übung 2.18** Betrachten Sie die Abbildung

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-1/t^2}), & t > 0 \\ (t, e^{-1/t^2}, 0), & t < 0 \\ (0, 0, 0), & t = 0. \end{cases}$$

1. Beweisen Sie, dass  $\alpha$  eine differenzierbare Kurve ist, und zwar  $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ .
2. Beweisen Sie, dass  $\alpha$  regulär ist für alle  $t$  und dass die Krümmung von  $\alpha$  nur im Nullpunkt verschwindet, also  $\kappa(t) \neq 0$  für  $t \neq 0$  und  $\kappa(0) = 0$ .
3. Zeigen Sie, dass der Grenzwert der Schmiegeebenen bei  $t \rightarrow 0$ ,  $t > 0$  die Ebene  $y = 0$  ist, aber der Grenzwert der Schmiegeebenen bei  $t \rightarrow 0$ ,  $t < 0$  die Ebene  $z = 0$  ist.
4. Was bedeutet das für die Torsion?

**Übung 2.19** Es sei  $\alpha : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine reguläre Kurve. Es gebe ein  $t_0$  mit  $a < t_0 < b$  so, dass der Abstand  $|\alpha(t)|$  vom Ursprung zur Spur von  $\alpha$  ein Maximum bei  $t_0$  hat. Beweisen Sie, dass für die Krümmung  $\kappa_\alpha$  von  $\alpha$  bei  $t_0$  gilt:  $|\kappa_\alpha(t_0)| \geq 1/|\alpha(t_0)|$ .

**Übung 2.20** Gibt es eine einfache geschlossene Kurve in der Ebene mit einer Länge von 6 Metern, die einen Flächeninhalt von 3 Quadratmetern umschließt?

**Übung 2.21** Es sei  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine glatte, geschlossene Kurve mit Länge  $L_\alpha$  und Rotationsindex  $I(\alpha)$ . Für die Krümmung gelte  $|\kappa_\alpha(t)| \leq c$ . Beweisen Sie:

$$L_\alpha \geq \frac{2\pi I(\alpha)}{c}.$$

**Übung 2.22** *Es sei  $\alpha : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine reguläre einfach geschlossene konvexe Kurve und  $T_w(\alpha)$  sei die Tangente zu  $\alpha$  im Punkt  $w \in \text{Spur } \alpha$ . Zeigen Sie:*

1. *Wenn eine Gerade  $\mathbb{R}_\alpha$  in zwei Punkten  $v, w \in \text{Spur } \alpha$  tangential an  $\alpha$  anliegt und  $v \neq w$  ist, dann tangiert die Gerade die Kurve im ganzen Intervall  $[w, v] \subset T_w(\alpha) \cap \text{Spur } \alpha$ .*
2. *Wenn eine Gerade  $\mathbb{R}_\alpha$  die Kurve  $\alpha$  im einem Punkt  $v \in \text{Spur } \alpha$  schneidet, dann existiert nur noch ein weiterer Schnittpunkt  $w \in T_w(\alpha) \cap \text{Spur } \alpha$ .*

### 3 FLÄCHENTHEORIE

#### 3.1 PARAMETRISIERTE FLÄCHEN

**Definition 3.1** *Eine Abbildung*

$$X = (X_1, X_2, X_3)^\top : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (3.1)$$

eines offenen Gebiets  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  auf den Raum  $\mathbb{R}^3$  nennt man **parametrisiertes Flächenstück**, wenn gilt:

- i. Die skalaren Funktionen  $X_1, X_2$  und  $X_3$  (die Komponenten von  $X$ ) sind stetig differenzierbar  $X_j \in C^1(\Omega)$ ,  $j = 1, 2, 3$ .
- ii.  $X$  ist ein Homöomorphismus, das heißt  $X$  besitzt eine stetige Inverse  $X^{-1} : \text{Spur } X \rightarrow \Omega$ , die die Einschränkung  $X^{-1} = F|_{\text{Spur } X}$  einer stetigen Abbildung  $F : W \rightarrow \mathbb{R}^2$  auf  $\text{Spur } X \subset W$  ist.
- iii. Für alle  $(u, v) \in \Omega$  hat die lineare Abbildung (die Jakobi Matrix)

$$DX_{(u,v)} := J_{(u,v)} = \begin{bmatrix} X_{1,u} & X_{1,v} \\ X_{2,u} & X_{2,v} \\ X_{3,u} & X_{3,v} \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (3.2)$$

maximalen Rang (Rang 2) und ist deshalb injektiv.

**Definition 3.2** *Der Untervektorraum*

$$DX_{(u,v)}(\mathbb{R}^2) =: T_{(u,v)}X \subset \mathbb{R}^3 \quad (3.3)$$

heißt die **Tangentialebene** (oder die **Tangentialraum**) von  $X$  im Punkt  $(u, v)$ . Die Elemente von  $T_{(u,v)}X$  heißen **Tangentialvektoren an  $X$  im Punkt  $(u, v)$** .

Ist (3.1) eine Fläche und  $\{e_1, e_2\}$ ,  $e_1 = (1, 0)^\top$ ,  $e_2 = (0, 1)^\top$  die kanonische Basis des  $\mathbb{R}^2$ , so sind  $e_1$  und  $e_2$  tangential an die “Koordinatenkurven”  $(u, v_0)$  und  $(u_0, v)$  im Punkt  $(u_0, v_0) \in \Omega$ . Das Bild der “Koordinatenkurven” wird auf die Kurven  $X(u, v_0) \subset \text{Spur } X$  und  $X(u_0, v) \subset \text{Spur } X$  abgebildet und deren Tangentvektoren im Punkt  $X(u_0, v_0) \in \text{Spur } X$  sind  $X_u(u, v_0)$ ,  $X_v(u_0, v)$ . Nach Definition des Differentials gilt

$$DX_{(u,v)}e_1 = X_u, \quad DX_{(u,v)}e_2 = X_v.$$

Da die Jakobi Matrix  $J_{(u,v)}$  maximalen Rang 2 hat (vgl. (3.2)), sind die Tangentvektoren  $X_u, X_v$  linear unabhängig. Da  $\{e_1, e_2\}$  Basisvektoren des  $\mathbb{R}^2$  sind (siehe § 1.5), die durch  $DX_{(u,v)}$  auf  $\{X_u, X_v\}$  abgebildet werden, ist  $\{X_u, X_v\}$  eine Basis des Tangentialraums  $T_{(u,v)}X$ . Ist also  $V \in T_{(u,v)}X$  ein Tangentialvektor an  $X$  in  $(u, v)$ , so gibt es Zerlegungskoeffizienten  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  mit

$$V = \alpha DX_{(u,v)}e_1 + \beta DX_{(u,v)}e_2 = \alpha X_u + \beta X_v.$$

**Lemma 3.3** Der Tangentialraum  $T_{(u,v)}X$  wird von den linear unabhängigen Tangentialvektoren  $X_u$  und  $X_v$  aufgespannt:

$$T_{(u,v)}X = \{\alpha X_u + \beta X_v : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}. \quad \blacksquare$$

**Beispiel 3.4**  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $X(u, v) = A + uB + vC$ ,  $A, B, C \in \mathbb{R}^3$  ist genau dann eine Fläche, wenn  $DX = (B, C)$  Rang 2 hat, also wenn  $B$  und  $C$  linear unabhängig sind.

Die Tangentialebene  $T_{(u,v)}X = TX$  ist die von den Vektoren  $B$  und  $C$  aufgespannte Ebene. Spur  $X = X(\mathbb{R}^2)$  ist die affine Ebene  $A + TX$ .

Graphenfläche  $f(u, v) = \sin u \cos v$

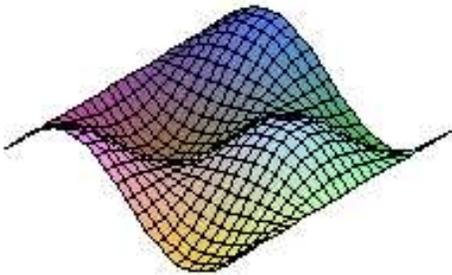


Fig. 3.1

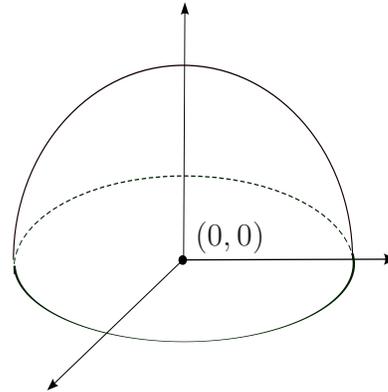


Fig. 3.2

**Beispiel 3.5** Es sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Die Abbildung

$$X_f(u, v) := (u, v, f(u, v))^T \quad (3.4)$$

heißt **Graphenabbildung**.  $X = X_f$  ist immer eine Fläche, der **Graph von f**, da das Differential

$$X_u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u \end{bmatrix} = (1, 0, f_u)^T, \quad X_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v \end{bmatrix} = (0, 1, f_v)^T, \quad DX = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{bmatrix}$$

bzgl. der kanonischen Basen von  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  maximalen Rang 2 besitzt.

Die Tangentialebene ist

$$T_{(u,v)}X = \{\lambda X_u + \mu X_v : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda, \mu, \lambda f_u + \mu f_v)^T : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

**Beispiel 3.6**  $\Omega = D^2 = \{(u, v)^T \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$ ,  $f : D^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(u, v) = \sqrt{1 - u^2 - v^2}$ . Dann ist Spur  $X$  die obere Hemisphäre der Einheitskugel

$$\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\} \quad (3.5)$$

und

$$f_u = \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} = \frac{-u}{f(u,v)},$$

$$f_v = \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} = \frac{-v}{f(u,v)},$$

$$T_{(u,v)}X = \left\{ \left( \lambda, \mu, \frac{\lambda u + \mu v}{f(u,v)} \right)^\top : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Insbesondere gilt

$$T_{(0,0)}X = \{(\lambda, \mu, 0)^\top : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3.$$

**Definition 3.7** Ein Vektorfeld ist eine differenzierbare Abbildung

$$V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

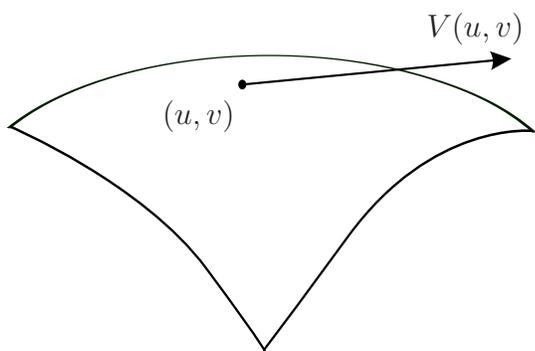


Fig. 3.3

Das Vektorfeld  $V$  heißt **tangential** längs einer Fläche  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , falls gilt

$$V_{(u,v)} \in T_{(u,v)}X \quad \text{für alle } (u, v) \in \Omega;$$

Das Vektorfeld  $V$  heißt **normal** längs die Fläche  $X$ , falls gilt

$$V_{(u,v)} \perp T_{(u,v)}X \quad \text{für alle } (u, v) \in \Omega;$$



$$V_{(u,v)} \cdot W = 0 \quad \text{für alle } W \in T_{(u,v)}X.$$

**Vorstellung:** jedem  $z(u, v) \in \text{Spur } X$  wird ein Vektor  $V(u, v)$  zugeordnet.

**Beispiel 3.8**  $X_u, X_v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  sind tangentielle Vektorfelder längs  $X$ ,

$\mathcal{N}_{u,v} := X_u \times X_v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist ein normales Vektorfeld längs  $X$ , weil  $\mathcal{N}_{u,v}$  zu den Basisektoren des Tangentialraumes  $(X_u, X_v)$  orthogonal steht (siehe Eigenschaft V.4 des Vektorprodukts in (1.46)) und deshalb natürlich auch zu allen Tangentialvektoren der Fläche  $\text{Spur } X$  im Punkt  $X(u, v)$ .

Die gerade erwähnten Vektoren sind sehr wichtig und wir werden auf dieses Thema in Definition 3.10 zurückgreifen.

**Satz 3.9** Es sei  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Vektorfeld längs der Fläche  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Dann gibt es differenzierbare Funktionen  $\alpha, \beta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$V(u, v) = \alpha(u, v)X_u(u, v) + \beta(u, v)X_v(u, v). \quad (3.6)$$

Sind umgekehrt  $\alpha, \beta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, so wird durch (3.6) ein tangentiales Vektorfeld längs  $X$  definiert.

**Beweis:** Falls  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein tangentiales Vektorfeld längs  $X$  ist, so kann  $V(u, v)$  in der Form (3.6) dargestellt werden. Mit anderen Worten: man kann  $V(u, v)$  bezüglich der Basis  $X_u, X_v$  des zweidimensionalen Tangentialraumes  $T_{(u,v)}X$  zerlegen (siehe Lemma 3.3).

Nun sei  $V$  gegeben in der Form (3.6). Dann folgt

$$\begin{aligned}\alpha X_u \cdot X_u + \beta X_v \cdot X_u &= V \cdot X_u, \\ \alpha X_u \cdot X_v + \beta X_v \cdot X_v &= V \cdot X_v,\end{aligned}$$

also mit

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(u, v) = |X_u|^2, \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}(u, v) = X_u \cdot X_v, \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}(u, v) = |X_v|^2 \quad (3.7)$$

bekommen wir

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \mathcal{F} & \mathcal{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \cdot X_u \\ V \cdot X_v \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Aus Lemma 1.27.ii, mit der speziellen Wahl  $u = x = X_u, v = y = X_v$ , folgt

$$\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2 = |X_u|^2|X_v|^2 - (X_u \cdot X_v)^2 = |X_u \times X_v|^2 > 0 \quad (3.9)$$

da  $|X_u \times X_v| = 0$  genau dann, wenn  $X_u, X_v$  linear abhängig sind (vgl. V.2 in § 0.6). Aber wir schließen lineare Abhängigkeit aus, da  $X$  eine Fläche ist (vgl. Definition 3.1). Es folgt

$$G_X := [g_{jk}]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \mathcal{F} & \mathcal{G} \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

$$\inf_{u,v \in \Omega} \det G_X(u, v) = \inf_{u,v \in \Omega} [\mathcal{E}(u, v)\mathcal{G}(u, v) - \mathcal{F}^2(u, v)] > 0.$$

Aus (3.8) folgt

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = G_X^{-1} \begin{bmatrix} V \cdot X_u \\ V \cdot X_v \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} \begin{bmatrix} \mathcal{G} & -\mathcal{F} \\ -\mathcal{F} & \mathcal{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \cdot X_u \\ V \cdot X_v \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

$\alpha, \beta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sind differenzierbare Funktionen, denn  $X_u, X_v$  sind differenzierbar.

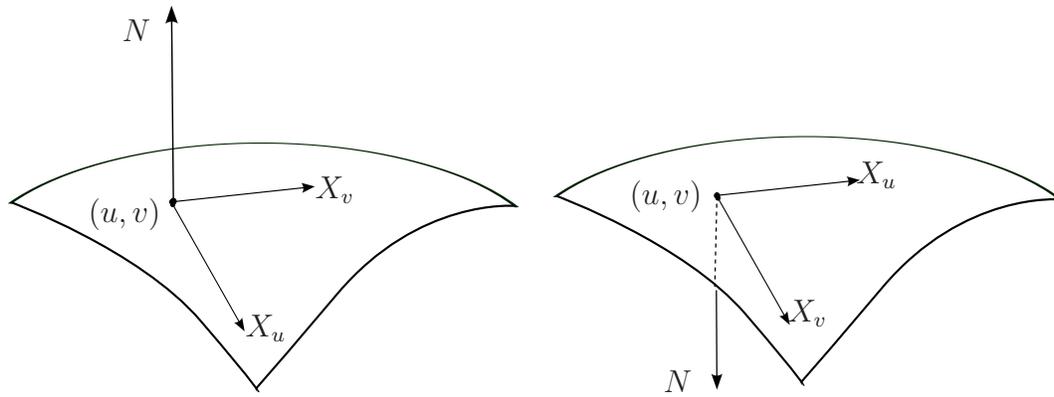
Dass durch die Darstellung (3.6) mit differenzierbaren  $\alpha, \beta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ein tangentiales Vektorfeld längs  $X$  definiert wird, ist offensichtlich, denn  $X_u$  und  $X_v$  sind schon tangentielle Vektorfelder. Damit ist auch die letzte Aussage gezeigt. ■

**Definition 3.10**  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei eine reguläre Fläche. Die Abbildung  $N : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2$  auf die Einheitskugel  $\mathbb{S}^2$  (Einheits-Normalen-Feld) ist definiert durch

$$N(u, v) := \frac{X_u(u, v) \times X_v(u, v)}{|X_u(u, v) \times X_v(u, v)|}, \quad (u, v)^\top \in \Omega, \quad (3.12)$$

heißt **Gauß'sche Abbildung**.

Das Tripel an Vektorfeldern  $\{X_u, X_v, N\}$  längs der Fläche  $\text{Spur } X$  heißt das **Gauß'sche (begleitende) Dreibein** an die Fläche.



Das Gauß'sche Dreibein (orientiert positiv!)

Fig. 3.4

**Bemerkung 3.11** Die Vektorfelder  $X_u$  und  $X_v$  sind linear unabhängig und das Vektorfeld  $N_{u,v}$  steht senkrecht zu den beiden anderen:  $X_u \cdot N_{u,v} = X_v \cdot N_{u,v} = 0$  (vgl. Beispiel 3.8).

Außerdem,  $\{X_u, X_v, N\}$  bildet ein positiv orientierte Basis, da

$$\det [X_u, X_v, N] = \frac{\det [X_u, X_v, X_u \times X_v]}{|X_u \times X_v|} = |X_u \times X_v| > 0$$

(vgl. Lemma 1.27.i und (3.9)).

**Definition 3.12** Es sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Fläche. Eine **Umparametrisierung** von  $X$  ist gegeben durch einen Diffeomorphismus  $\varphi : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ , wobei  $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$  ein offenes Gebiet ist. Man nennt

$$\tilde{X} := X \circ \varphi : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (3.13)$$

die **umparametrisierte Fläche**. Offenbar gilt  $\text{Spur } \tilde{X} = \text{Spur } X$ .

Ist  $\det D\varphi > 0$  auf  $\tilde{\Omega}$ , so heißt  $\varphi$  **orientierungstreu**.

**Bemerkung 3.13** Die Eigenschaft einer Fläche „Umparametrisierung einer anderen Fläche zu sein“ definiert auf der Klasse der Flächen eine Äquivalenzrelation:  $\tilde{X} \simeq X \Leftrightarrow \tilde{X}$  ist eine Umparametrisierung von  $X$ . Jede Äquivalenzklasse entspricht einer unparametrisierten Fläche  $\text{Spur } X$ .

Es ist offensichtlich, dass nur **zwei unterschiedliche Orientierungen** einer Fläche existieren und eine Parametertransformation, die nicht orientierungsuntreu ist, verwandelt eine Orientierung in die andere.

Wir werden folgende Notation zur Beschreibung der Orientierung der Parametertransformation verwenden:  $\text{sign } \varphi = \text{sign } \det D\varphi(u, v) = \pm 1$ .

**Lemma 3.14** Sei  $\varphi : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$  eine Parametertransformation (orientierungstreu  $\text{sign } \varphi = +1$  oder orientierungsuntreu  $\text{sign } \varphi = -1$ ) und bezeichne  $\tilde{X} := X \circ \varphi$  die transformierte Fläche. Die Parametertransformation läßt die Gauß'sche Abbildung bis auf das Vorzeichen unverändert:  $\tilde{N}(u, v) = \text{sign } \varphi N(\varphi(u, v))$ .

Insbesondere ist die Gauß'sche Abbildung invariant  $\tilde{N}(u, v) = N(\varphi(u, v))$  unter orientierungstreuem Parameterwechsel  $\text{sign } \varphi = +1$ .

**Beweis.** Da  $D\tilde{X}(u, v) = (DX)(\varphi(u, v))D\varphi(u, v)$ , von (1.48) und (3.12) folgt

$$\begin{aligned} \tilde{N}(u, v) &= \frac{\tilde{X}_u \times \tilde{X}_v}{|\tilde{X}_u \times \tilde{X}_v|} = \frac{\det D\varphi(u, v)(X_u \times X_v)(\varphi(u, v))}{|\det D\varphi(u, v)|(|X_u \times X_v|)(\varphi(u, v))} \\ &= \text{sign } \varphi \frac{(X_u \times X_v)(\varphi(u, v))}{(|X_u \times X_v|)(\varphi(u, v))} = \text{sign } \varphi N(\varphi(u, v)). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Beispiel 3.15** Für die Graphenabbildung

$$X_f(u, v) := (u, v, f(u, v))^T, \quad f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad X_f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (3.14)$$

(vgl. Beispiel 3.5) erhalten wir

$$X_u = (1, 0, f_u)^T, \quad X_v = (0, 1, f_v)^T, \quad X_u \times X_v = (-f_u, -f_v, 1)^T \quad (3.15)$$

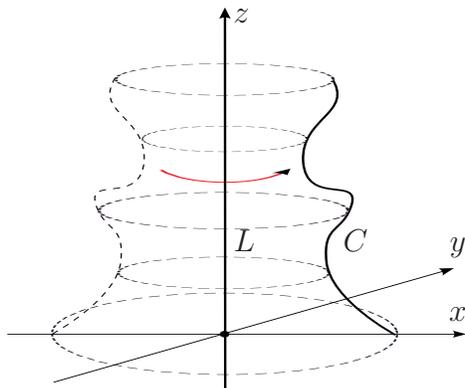
(vgl. (1.44)) und

$$|X_u \times X_v| = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}, \quad N(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}(-\nabla f, 1)^T \quad (3.16)$$

wobei

$$\nabla f(u, v) = (f_u(u, v), f_v(u, v))^T$$

den Gradienten von  $f$  bezeichnet (vgl. (1.53)).



Rotationsfläche

Fig. 3.5

**Beispiel 3.16** Es sei  $C$  eine reguläre ebene Kurve und  $L$  eine Gerade, die  $C$  nicht trifft (vgl. Fig. 3.5). Eine Drehung von  $C$  um die Achse  $L$  liefert eine Rotationsfläche. Ohne Einschränkung sei  $L$  die  $z$ -Achse in der  $(x, 0, z)$ -Ebene, und  $C$  liege rechts von der  $z$ -Achse. Es sei  $\gamma(t) = (f(t), g(t))^T$ ,  $a < t < b$ ,  $f(t) > 0$ , eine reguläre Parametrisierung von  $C$ . Definiere:

$$X : (0, 2\pi) \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (3.17)$$

$$X(u, v) := (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))^T.$$

Dann ist

$$X_u = (-f(v) \sin u, f(v) \cos u, 0)^T, \quad (3.18)$$

$$X_v = (f'(v) \cos u, f'(v) \sin u, g'(v))^T.$$

Aus  $|X_u \times X_v|^2 = \mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2 = f^2|\gamma'|^2 > 0$  folgt, dass durch Spur  $X$  tatsächlich eine Fläche definiert wird. Für die Gauß-Abbildung ergibt sich

$$N = \frac{(g'(v) \cos u, g'(v) \sin u, -f'(v))^\top}{\sqrt{[f'(v)]^2 + [g'(v)]^2}}. \quad (3.19)$$

### 3.2 ERSTE FUNDAMENTALFORM

**Lemma 3.17** *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{G_X} : T_{(u,v)} &\rightarrow \mathbb{R}_{G_X}^2, & \mathcal{I}_{G_X}(U) &= \bar{U}, \\ U = \alpha_1 X_u + \alpha_2 X_v \in T_{(u,v)}X, & & \bar{U} &= (\alpha_1, \alpha_2)^\top \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (3.20)$$

(siehe (3.10) für  $G_X$ ) bildet in den Euklidischen Raum  $\mathbb{R}_{G_X}^2$  ab. Statt wir diesen mit der Metrik

$$(U, V) = (\bar{U}, \bar{V})_{G_X} := G_X \bar{U} \cdot \bar{V} = \sum_{j,k=1}^2 g_{jk} \alpha_j \beta_k, \quad \bar{U}, \bar{V} \in \mathbb{R}^2 \quad (3.21)$$

aus, dann ist  $\mathcal{I}_{G_X}$  eine Isometrie zwischen  $T_{(u,v)}$  und  $\mathbb{R}_{G_X}^2$ :

$$\|\mathcal{I}_{G_X} U\|_{G_X}^2 = \|\bar{U}\|_{G_X}^2 = (\bar{U}, \bar{U})_{G_X} = (U, U) = \|U\|^2. \quad (3.22)$$

*Die bilineare Form*

$$I_{(u,v)}(U, V) = (U, V) := U \cdot V = G_X \bar{U} \cdot \bar{V}, \quad U, V \in T_{(u,v)} \quad (3.23)$$

ist symmetrisch und positiv definit.

**Beweis:** Da  $\|\cdot\|_{G_X}^2$  tatsächlich eine Norm darstellt, überprüfen wir, dass  $\|\bar{U}\|_{G_X}^2 = 0$  impliziert  $\bar{U} = 0$ . In der Tat folgt aus  $0 = \|\bar{U}\|_{G_X}^2 = (U, U) = \|U\|^2$ :  $U = \alpha X_u + \beta X_v = 0$ , wobei  $(\alpha, \beta)^\top = \bar{U} \in \mathbb{R}_{G_X}^2$ . Da die Basisvektoren  $X_u, X_v$  linear unabhängig sind, folgt  $\alpha = \beta = 0$  und schließlich  $\bar{U} = (\alpha, \beta)^\top = 0$ .

Beide anderen Grundeigenschaften der Norm sind trivial nachweisbar.

Dass die Bilinearform  $I_{(u,v)}$  in (3.23) symmetrisch ist  $I_{(u,v)}(U, V) = I_{(u,v)}(V, U)$  ist offensichtlich und da  $I_{(u,v)}(U, V)$  positiv definit ist  $I_{(u,v)}(U, U) = 0 \Rightarrow U = 0$ , folgt unmittelbar aus (3.21) und (3.22). ■

**Definition 3.18** *Es sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Fläche.*

i. Für  $(u, v) \in \Omega$  induziert die Inklusion  $T_{(u,v)}X \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  durch das Euklidische Skalarprodukt auf dem  $\mathbb{R}^3$  eine Bilinearform auf der Tangentialebene  $T_{(u,v)}X$ , die **Erste Fundamentalform**  $I_{(u,v)}$  in (3.23).

Außer der Schreibweise  $I_{(u,v)}$  sind auch  $I$ ,  $g$ ,  $g(u, v)$  gebräuchlich.

ii. Die durch die lineare Abbildung  $DX_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch das Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^3$  induzierte symmetrische Bilinearform auf  $\mathbb{R}_{G_X}^2$

$$I_{(u,v)}(\bar{U}, \bar{V}) := DX_{(u,v)}(\bar{U}) \cdot DX_{(u,v)}(\bar{V}) \quad (3.24)$$

heißt ebenfalls **Erste Fundamentalform**.

**Bemerkung 3.19** Die lineare Abbildung  $DX_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{(u,v)}X$  ist bijektiv und eine Isometrie bzgl. der Ersten Fundamentalform, Also ist keine Unterscheidung notwendig, wenn  $\mathbb{R}^2$  und  $T_{(u,v)}X$  mittels  $DX_{(u,v)}$  identifiziert werden:

$$\bar{U}, \bar{V} \in \mathbb{R}^2, \quad U, V \in T_{(u,v)}X, \quad U = DX_{(u,v)}(\bar{U}), \quad V = DX_{(u,v)}(\bar{V})$$

dann

$$(3.25)$$

$$I_{(u,v)}(\bar{U}, \bar{V}) = DX_{(u,v)}(\bar{U}) \cdot DX_{(u,v)}(\bar{V}) = U \cdot V = I_{(u,v)}(U, V).$$

**Lemma 3.20** Die Fundamentalmatrix  $G_X = [g_{jk}]_{2 \times 2}$  der Ersten Fundamentalform bzgl. der kanonischen Basis  $\{X_u, X_v\}$  von  $T_{(u,v)}X$  (vgl. Lemma 1.25) ist gegeben durch die Gleichungen (3.10) und (3.7) (Klassische Notation, eingeführt von Gauß):

$$g_{11} = X_u \cdot X_u = \mathcal{E}, \quad g_{12} = g_{21} = X_u \cdot X_v = \mathcal{F}, \quad g_{22} = X_v \cdot X_v = \mathcal{G}. \quad (3.26)$$

$G_X = [g_{jk}]_{2 \times 2}$  ist auch die Fundamentalmatrix der Ersten Fundamentalform  $I_{(u,v)}$  auf  $\mathbb{R}^2$  bzgl. der kanonische Basis  $\{e_1, e_2\}$  des  $\mathbb{R}^2$  (vgl. (1.27), (1.29)).

**Beweis:** Die Identifizierung  $T_{(u,v)}X \cong \mathbb{R}^2$  gelingt durch Abbildung (3.20), denn sie transformiert die Erste Fundamentalform in folgende bilineare Form

$$\begin{aligned} I(U, V) &= U \cdot V = (\alpha_1 X_u + \alpha_2 X_v) \cdot (\beta_1 X_u + \beta_2 X_v) \\ &= \mathcal{E} \alpha_1 \beta_1 + \mathcal{F} (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) + \mathcal{G} \alpha_2 \beta_2 = G_X \bar{U} \cdot \bar{V}, \\ U, V \in T_{(u,v)}, \quad U &= \alpha_1 X_u + \alpha_2 X_v, \quad V = \beta_1 X_u + \beta_2 X_v, \\ \bar{U}, \bar{V} \in \mathbb{R}^2, \quad \bar{U} &= (\alpha_1, \alpha_2)^\top, \quad \bar{V} = (\beta_1, \beta_2)^\top \end{aligned}$$

(vgl. (3.7)-(3.10) und (3.26)).

■

**Korollar 3.21** (i) Die Erste Fundamentalform  $I_{(u,v)}$  einer Fläche  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X \in C^2(\Omega)$ , ist symmetrisch und positiv definit.

(ii) Die Abbildung  $(u, v) \mapsto I_{(u,v)}$  ist differenzierbar auf  $\Omega$ , d.h. die Koeffizienten  $g_{jk} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  der Fundamentalmatrix sind differenzierbare Funktionen.

**Beweis:** Zu (i): siehe Lemma 3.17.

Zu (ii): Folgt aus der Koeffizientendarstellung (3.26). ■

**Bemerkung 3.22** Offenbar ist die Differenzierbarkeit der Ersten Fundamentalform auf Fläche  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X \in C^2(\Omega)$ , äquivalent dazu, dass für beliebige tangentielle Vektorfelder  $U, V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  längs  $X$  die Abbildung

$$\Omega \ni (u, v) \mapsto I_{(u,v)}(U(u, v), V(u, v)) = a\tilde{a}\mathcal{E} + (\tilde{a}\tilde{b} + \tilde{a}\tilde{b})\mathcal{F} + \tilde{b}\tilde{b}\mathcal{G}$$

differenzierbar ist, wobei  $U = aX_u + bX_v$ ,  $V = \tilde{a}X_u + \tilde{b}X_v$  (vgl. Satz 3.9).

**Satz 3.23 (Invarianz).** Es sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Fläche.

i. Ist  $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Bewegung, so ist auch  $\tilde{X} := B \circ X$  eine Fläche und es gilt:

$$I(U, V) = \tilde{I}(DB(U), DB(V)) \quad \text{für } U, V \in T_{(u,v)}X. \quad (3.27)$$

ii. Ist  $\varphi : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$  eine Parametertransformation und  $\tilde{X} = X \circ \varphi$ , so gilt

$$\tilde{I}_{(u,v)}(U, V) = I_{\varphi(u,v)}(U, V) \quad \text{für } U, V \in T_{(u,v)}\tilde{X} = T_{\varphi(u,v)}X, \quad (3.28)$$

sowie

$$\tilde{I}_{(u,v)}(\bar{U}, \bar{V}) = I_{\varphi(u,v)}(D\varphi_{(u,v)}(\bar{U}), D\varphi_{(u,v)}(\bar{V})) \quad \text{für } \bar{U}, \bar{V} \in \mathbb{R}^2. \quad (3.29)$$

**Beweis:** Zu (i): Falls  $B(X) = R(X) + T$  (Rotation  $R \in O(3)$  und Translation  $T$ ), dann ist die Ableitung gegeben durch  $DB = R$ ,  $R^\top = R^{-1}$ . Im Punkt  $(u, v) \in \Omega$  folgt:

$$\tilde{I}(DB(U), DB(V)) = \tilde{I}(RU, RV) = RU \cdot RV = R^\top RU \cdot V = U \cdot V = I(U, V)$$

für alle  $U, V \in T_{(u,v)}X$ .

Zu (ii): Für  $\bar{U}, \bar{V} \in \mathbb{R}^2$  gilt

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{(u,v)}(U, V) &= \tilde{I}_{(u,v)}(\bar{U}, \bar{V}) = D\tilde{X}_{(u,v)}(\bar{U}) \cdot D\tilde{X}_{(u,v)}(\bar{V}) \\ &= [DX_{\varphi(u,v)} \cdot D\varphi(u, v)](\bar{U}) \cdot [DX_{\varphi(u,v)} \cdot D\varphi(u, v)](\bar{V}) \\ &= I_{\varphi(u,v)}(D\varphi_{(u,v)}(\bar{U}), D\varphi_{(u,v)}(\bar{V})) = I_{\varphi(u,v)}(U, V), \end{aligned}$$

wobei  $U = D\varphi_{(u,v)}(\bar{U})$  und  $V = D\varphi_{(u,v)}(\bar{V})$ .

Die Erste Behauptung ist klar, da  $\text{Spur } X = \text{Spur } \tilde{X}$ . ■

**Korollar 3.24** Ist  $\varphi : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$  eine Parametertransformation mit

$$\varphi(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) = (u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2))^\top,$$

so gilt für die Fundamentalmatrizen  $\tilde{G}_X = [\tilde{g}_{ij}]_{2 \times 2}$  von  $\tilde{X} := X \circ \varphi$  und  $G_X = [g_{ij}]_{2 \times 2}$  von  $X$

$$\tilde{G}_X = (D\varphi)^\top G_X D\varphi. \quad (3.30)$$

oder, in Details:

$$\tilde{g}_{jk}(\tilde{u}) = \sum_{\ell, m=1}^2 \frac{\partial u^\ell}{\partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^m}{\partial \tilde{u}^k} g_{\ell m}(\varphi(\tilde{u})) = \sum_{\ell, m=1}^2 \frac{\partial u^\ell}{\partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^m}{\partial \tilde{u}^k} g_{\ell m}(u) \quad (3.31)$$

**Beweis:** Mit  $\bar{U}, \bar{V} \in \mathbb{R}^2$  (vgl. (3.29)) folgt (vgl. (3.30)):

$$\tilde{I}(\bar{U}, \bar{V}) = G_X D\varphi \bar{U} \cdot D\varphi \bar{V} = (D\varphi)^\top G_X D\varphi \bar{U} \cdot \bar{V} = \tilde{G}_X \bar{U} \cdot \bar{V}. \quad \blacksquare$$

**Beispiel 3.25** Für die Graphenabbildung  $X_f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X_f(u, v) := (u, v, f(u, v))^\top$  mit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar (vgl. Beispiel 3.5 und Beispiel 3.15) erhalten wir für die Koeffizienten die folgenden Ausdrücke:

$$\mathcal{E} = 1 + f_u^2, \quad \mathcal{F} = f_u f_v, \quad \mathcal{G} = 1 + f_v^2, \quad G_f = \begin{bmatrix} 1 + f_u^2 & f_u f_v \\ f_u f_v & 1 + f_v^2 \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

**Beispiel 3.26** Für die Rotationsfläche  $X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))^\top$  mit  $f(v) > 0$  (vgl. Beispiel (3.16)) berechnen wir unkompliziert:

$$\mathcal{E} = f^2, \quad \mathcal{F} = 0, \quad \mathcal{G} = (f')^2 + (g')^2, \quad G_X = \begin{bmatrix} f^2 & 0 \\ 0 & (f')^2 + (g')^2 \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

Insbesondere gelten für den Zylinder  $X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)^\top$  die Formeln:

$$\mathcal{E} = 1, \quad \mathcal{F} = 0, \quad \mathcal{G} = 1, \quad G_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E. \quad (3.34)$$

**Beispiel 3.27** Das Helikoid  $H^d$  wird erzeugt von Geraden die parallel zur  $xy$ -Ebene durch jeden Punkt der Helix (siehe Beispiel 1.14) und die  $z$ -Achse gezogen sind. Wenn der Helix mit dem Funktion  $\alpha(u) = (\cos u, \sin u, au)^\top$  dargestellt ist (siehe Beispiel 1.14), werde der Helikoid  $H^d$  mit dem folgendem Funktion dargestellt (siehe auch Beispiel Beispiel 3.78 später):

$$H^d(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au)^\top, \quad u \in [0, 2\pi), \quad -\infty < v < \infty.$$

Nach kurzer Rechnung erhalten wir:

$$\begin{aligned} X_u &= (-v \sin u, v \cos u, c)^\top, & X_v &= (\cos u, \sin u, 0)^\top, \\ N &= \frac{1}{\sqrt{c^2 + v^2}}(-c \sin u, c \cos u, -v)^\top, \\ \mathcal{E} &= c^2 + v^2, & \mathcal{F} &= 0, & \mathcal{G} &= 1, & G_{H^d} &= \begin{bmatrix} c^2 + v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

### 3.3 ZWEITE FUNDAMENTALFORM

**Satz 3.28** Für eine Fläche  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  und die assoziierte Gauß-Abbildung  $N : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2$  (vgl. (3.12)) sind die Ableitungen  $N_u$  und  $N_v$  tangentielle Vektorfelder:

$$N_u, N_v \in T_{(u,v)}X \quad \text{und} \quad DN_{(u,v)}(\mathbb{R}^2) \subset T_{(u,v)}X. \quad (3.36)$$

**Beweis:** Das Differential  $DN_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist eine lineare Abbildung und es gilt

$$DN_{(u,v)}(\mathbb{R}^2) = \text{span}\{DN_{(u,v)}(e_1), DN_{(u,v)}(e_2)\} = \text{span}\{N_u, N_v\}.$$

Andererseits da  $N \cdot N = |N|^2 \equiv 1$ , liefern die Ableitungen:

$$N \cdot N_u \equiv N \cdot N_v \equiv 0. \quad (3.37)$$

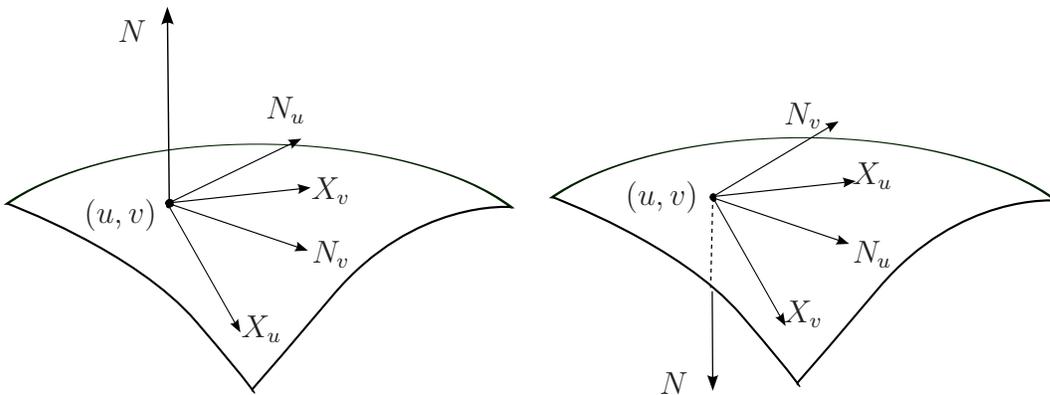


Fig. 3.6

Also steht  $N(u, v)$  senkrecht zu Vektoren  $N_u, N_v$  und damit auf  $DN(u, v)(\mathbb{R}^2)$ ; andererseits ist laut Definition

$$N_{(u,v)}^\perp = \text{span}\{X_u, X_v\} = T_{(u,v)}X$$

und daher  $N_u, N_v \in T_{(u,v)}X$ . ■

**Satz 3.29** *Die Abbildung*

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni (U, V) \rightarrow -DN_{(u,v)}(U) \cdot DX_{(u,v)}(V) \in \mathbb{R} \quad (3.38)$$

ist wohldefiniert, weil  $DN_{(u,v)}(U), DX_{(u,v)}(V) \in T_{(u,v)}X$ , und induziert eine symmetrische Bilinearform auf  $\mathbb{R}^2$ .

**Beweis:** Offenbar ist die Abbildung bilinear, da  $DN_{(u,v)}$  und  $DX_{(u,v)}$  linear sind. Differentiation der Verknüpfungen  $N \cdot X_u \equiv 0$  und  $N \cdot X_v \equiv 0$  liefert

$$N_v \cdot X_u = -N \cdot X_{uv} = -N \cdot X_{vu} = N_u \cdot X_v. \quad (3.39)$$

Da

$$DN_{(u,v)} = [N_u, N_v], \quad DX_{(u,v)} = [X_u, X_v], \quad U = (U_1, U_2)^\top, \quad V = (V_1, V_2)^\top$$

wir bekommen

$$\begin{aligned} -DN_{(u,v)}(U) \cdot DX_{(u,v)}(V) &= -(N_u \cdot X_u)U_1V_1 - (N_u \cdot X_v)U_1V_2 \\ &\quad - (N_v \cdot X_u)U_2V_1 - (N_v \cdot X_v)U_2V_2 \\ &= -(N_u \cdot X_u)U_1V_1 - (N_v \cdot X_u)U_1V_2 \\ &\quad - (N_u \cdot X_v)U_2V_1 - (N_v \cdot X_v)U_2V_2 \\ &= -DX_{(u,v)}(U) \cdot DN_{(u,v)}(V), \end{aligned}$$

also die behauptete Symmetrie. ■

**Definition 3.30** *Die symmetrische Bilinearform*

$$U, V \in \mathbb{R}^2 : II(U, V) = II_{(u,v)}(U, V) := -DN_{(u,v)}(U) \cdot DX_{(u,v)}(V) \quad (3.40)$$

(vgl. (3.37)) heißt die **Zweite Fundamentalform** von  $X$  im Punkt  $(u, v) \in \Omega$ .

Da  $X$  eine reguläre Fläche ist, ist die lineare Abbildung

$$DX_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{(u,v)}X, \quad (3.41)$$

zwischen zwei zweidimensionalen Vektorräumen bijektiv. Deshalb können wir die Zweite Fundamentalform auf  $\mathbb{R}^2$  identifizieren mit der durch  $DX_{(u,v)}$  auf  $T_{(u,v)}X$  induzierten bilinearen Form:

$$\begin{aligned} II_{(u,v)}^{TX}(U, V) &= - \left[ DN_{(u,v)} DX_{(u,v)}^{-1} U \right] \cdot V \\ &= II_{(u,v)}^{\mathbb{R}^2} \left( DX_{(u,v)}^{-1} U, DX_{(u,v)}^{-1} V \right), \quad U, V \in T_{(u,v)}X. \end{aligned} \quad (3.42)$$

**Definition 3.31** *Die Abbildung*

$$S_{(u,v)} := -DN_{(u,v)}DX_{(u,v)}^{-1} : T_{(u,v)}X \rightarrow T_{(u,v)}X \quad (3.43)$$

heißt **Weingarten-Abbildung**. Mit ihr läßt sich die Zweite Fundamentalform (3.42) auf  $T_{(u,v)}X$  schreiben als

$$II_{(u,v)}(U, V) = S_{(u,v)}U \cdot V, \quad U, V \in T_{(u,v)}X. \quad (3.44)$$

**Satz 3.32** *Die Fundamentalmatrix  $B_X = [b_{jk}]_{2 \times 2}$  der zweiten Fundamentalform bzgl. der kanonischen Basis  $\{X_u, X_v\}$  von  $T_{(u,v)}X$  (vgl. Lemma 1.27) ist durch die folgenden Gleichungen gegeben.<sup>(2)</sup>*

$$\begin{aligned} b_{11} &= -N_u \cdot X_u = N \cdot X_{uu} = \mathcal{L}, \\ b_{12} &= -N_u \cdot X_v = N \cdot X_{uv} = -N_v \cdot X_u = b_{21} = \mathcal{M}, \\ b_{22} &= -N_v \cdot X_v = N \cdot X_{vv} = \mathcal{N}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Damit kann man die Zweite Fundamentalform auf  $T_{(u,v)}X$  schreiben als

$$II_{(u,v)}(U, V) = B_X \bar{U} \cdot \bar{V}, \quad B_X = \begin{bmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

wobei

$$\bar{U} = (\alpha_1, \alpha_2)^\top \in \mathbb{R}^2, \quad \bar{V} = (\beta_1, \beta_2)^\top \in \mathbb{R}^2$$

falls  $U = \alpha_1 X_u + \alpha_2 X_v \in T_{(u,v)}X$ ,  $V = \beta_1 X_u + \beta_2 X_v \in T_{(u,v)}X$ .

**Beweis:** Mit Hilfe von (3.39) und der Differentiation der Verknüpfungen  $N \cdot X_u \equiv 0$  und  $N \cdot X_v \equiv 0$  erhalten wir:

$$N_u \cdot X_u = -N \cdot X_{uu}, \quad N_v \cdot X_v = -N \cdot X_{vv}. \quad (3.47)$$

Mit (3.39) und (3.47) beweisen wir die Behauptung analog wie im Beweis zu Lemma 3.20.

■

**Bemerkung 3.33** *Merke, dass die Vektoren  $N_u$  und  $N_v$  linear abhängig sein können - im Gegensatz zu  $X_u$  und  $X_v$  (sie sogar verschwinden:  $N_u = N_v = 0$  in einem Punkt oder in einem Gebiet).*

*Aber falls  $N_u$  und  $N_v$  linear unabhängig sind, können wir den Euklidischen Raum  $\mathbb{R}_{B_X}^2$  mit der Metrik*

$$(\bar{U}, \bar{V})_{B_X} := B_X \bar{U} \cdot \bar{V} = \sum_{j,k=1}^2 b_{jk} \alpha_j \beta_k, \quad \bar{U}, \bar{V} \in \mathbb{R}^2 \quad (3.48)$$

<sup>(2)</sup>Klassische, von Gaußeingeführte Notation.

ausgestatten, wobei  $\bar{U} = (\alpha_1, \alpha_2)^\top$ ,  $\bar{V} = (\beta_1, \beta_2)^\top$ . Dann ist die Abbildung

$$\mathcal{I}_{B_X} : T_{(u,v)} \rightarrow \mathbb{R}_{B_X}^2, \quad \mathcal{I}_{B_X}(U) = \bar{U}, \quad (3.49)$$

$$U = \alpha_1 X_u + \alpha_2 X_v \in T_{(u,v)} X, \quad \bar{U} = (\alpha_1, \alpha_2)^\top \in \mathbb{R}^2,$$

eine Isometrie zwischen den beiden zweidimensionalen Räumen  $T_{(u,v)}$  und  $\mathbb{R}_{B_X}^2$ :

$$\|\bar{U}\|_{B_X} = (\bar{U}, \bar{U})_{B_X} = (U, U) = \|U\|. \quad (3.50)$$

**Bemerkung 3.34** Allgemein gilt: eine beliebige Matrix  $\mathcal{H} = [h_{jk}]_{2 \times 2}$ , die positiv definit ist

$$(\mathcal{H}\bar{U}, \bar{U}) > 0 \quad \text{für } 0 \neq \bar{U} \in \mathbb{R}^2,$$

definiert die **Riemann'sche Metrik**

$$(\bar{U}, \bar{V})_{\mathcal{H}} := \mathcal{H}\bar{U} \cdot \bar{V}, \quad (3.51)$$

die durch die Abbildung

$$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} : T_{(u,v)} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{H}}^2, \quad \mathcal{I}_{\mathcal{H}}(U) = \bar{U}, \quad (3.52)$$

$$U = \alpha_1 X_u + \alpha_2 X_v \in T_{(u,v)} X, \quad \bar{U} = (\alpha_1, \alpha_2)^\top \in \mathbb{R}^2,$$

isometrisch auf den Tangentialraum  $T_{(u,v)}$  übertragbar ist (vgl. Lemma 3.17 und Bemerkung 3.33):

$$\|\bar{U}\|_{\mathcal{H}} = (\bar{U}, \bar{U})_{\mathcal{H}} = (U, U) = \|U\|. \quad (3.53)$$

**Bemerkung 3.35** Falls die Vektoren  $N_u, N_v$  linear unabhängig sind (vgl. Bemerkung 3.33), besitzt der Tangentialraum  $T_{(u,v)} X$  zwei ausgezeichnete Systeme von Basisvektoren:

$$T_{(u,v)} X = \text{span} \{X_u, X_v\} = \text{span} \{N_u, N_v\}. \quad (3.54)$$

Unter diesen Voraussetzungen ist die Weingarten Abbildung (3.43) nichts anderes als die Matrix des Basiswechsels. Zusammen mit den Isometrien (3.20) und (3.49) bildet sie das folgende **kommutative Diagramm**

$$\begin{array}{ccc} T_{(u,v)} X = \text{span} \{X_u, X_v\} & \xrightarrow{S_{(u,v)}} & T_{(u,v)} X = \text{span} \{N_u, N_v\} \\ \mathcal{I}_{G_X}^{-1} \uparrow & & \downarrow \mathcal{I}_{B_X} \\ \mathbb{R}_{G_X}^2 & \xrightarrow{S_X} & \mathbb{R}_{B_X}^2 \end{array} \quad (3.55)$$

wobei  $G_X$  und  $B_X$  die Matrizen der ersten und zweiten Fundamentalform sind (vgl. (3.10) und (3.46)). Die Abbildung

$$S_X = S_X(u, v) := \mathcal{I}_{B_X} S_{(u,v)} \mathcal{I}_{G_X}^{-1} : \mathbb{R}_{G_X}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_{B_X}^2 \quad (3.56)$$

heißt die **Weingarten Matrix** und in § 3.6 wird die Weingarten Matrix weiter untersucht.

**Satz 3.36 (Invarianz).** Die Zweite Fundamentalform  $II(U, V)$  ist invariant unter eigentlichen Bewegungen und orientierungserhaltenden Parametertransformationen (im Sinne von Satz 3.23). ■

**Beweis:** Zunächst sei  $B$  eine eigentliche Bewegung des  $\mathbb{R}^3$ . Dann ist mit  $X$  auch  $\tilde{X} := B \circ X$  eine Fläche, und es gilt

$$\tilde{X}_u = DB(X_u) = RX_u, \quad \tilde{X}_v = DB(X_v) = RX_v, \quad \tilde{N} = DB(N) = RN.$$

wobei  $R^\top = R^{-1}$ ,  $\det R \equiv 1$ . Dann:

$$\tilde{\mathcal{L}} = -\tilde{N}_u \cdot \tilde{X}_u = -RN_u \cdot RX_u = R^\top RN_u \cdot X_u = N_u \cdot X_u = \mathcal{L}$$

und analog  $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$ ,  $\tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N}$ . Dann mit (3.46) folgt

$$\tilde{II}_{(u,v)}(U, V) = II_{(u,v)}(U, V) \quad \text{für } U, V \in T_{(u,v)}X.$$

Nun sei  $\varphi : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$  eine orientierungserhaltende Parametertransformation. Für  $\tilde{X} := X \circ \varphi$  ist dann  $\tilde{N} = N \circ \varphi$  und, nach Lemma 3.14, gilt  $\tilde{N}_{(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)} = N_{\varphi(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)}$ . Nun erhalten wir für  $U, V \in T_{(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)}\tilde{X} = T_{\varphi(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)}X$

$$\begin{aligned} \tilde{II}_{(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)}(U, V) &= -D\tilde{N}_{(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)} \left[ D\tilde{X}_{(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)} \right]^{-1} U \cdot V \\ &= -DN_{\varphi(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)} D\varphi(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \left[ DX_{\varphi(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)} D\varphi(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \right]^{-1} U \cdot V \\ &= -DN_{\varphi(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)} \left[ DX_{\varphi(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)} \right]^{-1} U \cdot V = II_{\varphi(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)}(U, V). \end{aligned}$$

Entsprechend ergibt sich für  $\bar{U}, \bar{V} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \tilde{II}_{(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)}(\bar{U}, \bar{V}) &= -D\tilde{N}_{(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)}(\tilde{U})\bar{U} \cdot D\tilde{X}_{(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)}\bar{V} \\ &= -DN_{\varphi(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)} D\varphi(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)\bar{U} \cdot DX_{\varphi(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)} D\varphi(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)\bar{V} \\ &= II_{\varphi(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)}(D\varphi(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)\bar{U}, D\varphi(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)\bar{V}) = II_{\varphi(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)}(\bar{U}_0, \bar{V}_0), \end{aligned}$$

wobei  $\bar{U}_0 := D\varphi(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)\bar{U} \in \mathbb{R}^2$  und  $\bar{V}_0 := D\varphi(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)\bar{V} \in \mathbb{R}^2$ . ■

**Bemerkung 3.37** Im Gegensatz zur Ersten Fundamentalform  $I(U, V)$  wirkt sich bei der Zweiten Fundamentalform  $II(U, V)$  die Orientierung auf das Vorzeichen aus, weil sie auf  $N$  und damit auf  $DN$  wirkt!

**Beispiel 3.38** Eine Kugel mit Radius  $R > 0$

$$\mathbb{S}_R^2 := \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\} \quad (3.57)$$

hat die folgende Parametrisierung

$$X^R(u, v) := R(\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)^\top, \quad u \in [0, 2\pi), \quad v \in (0, \pi). \quad (3.58)$$

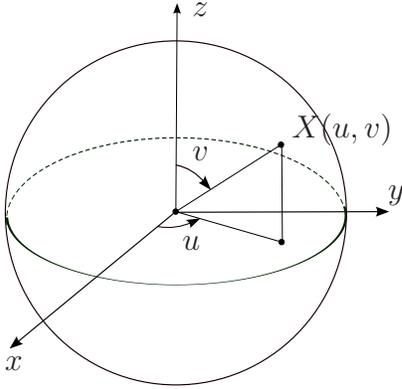


Fig. 3.7

Man nennt die Koeffizienten **sphärische Koordinaten**. Beachten Sie, dass weder der Nordpol  $(0, 0, 1)^\top$ , noch der Südpol  $(0, 0, -1)^\top$  als Bildpunkte der Parametrisierung auftauchen. Es folgt

$$\begin{aligned} X_u^R &= R(-\sin u \sin v, \cos u \sin v, 0)^\top, \\ X_v^R &= R(\cos u \cos v, \sin u \cos v, -\sin v)^\top, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= |X_u^R|^2 = R^2 \sin^2 v, \\ \mathcal{F} &= X_u^R \cdot X_v^R = 0, \quad \mathcal{G} = |X_v^R|^2 = R^2 \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$N^R(u, v) = \frac{X_u^R \times X_v^R}{|X_u^R \times X_v^R|} = -(\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)^\top = -\frac{1}{R}X(u, v).$$

Wir schließen

$$\begin{aligned} II(U, V) &= -DN(U) \cdot DX(V) = \frac{1}{R}DX(U) \cdot DX(V) = \frac{1}{R}I(U, V). \\ \text{Also } II(U, V) &= \frac{1}{R}U \cdot V, \quad U, V \in T_{(u,v)}X. \end{aligned}$$

**Beispiel 3.39** Der Torus

$$Y(u, v) = ((R + r \sin v) \cos u, (R + r \sin v) \sin u, r \cos v)^\top \quad (3.60)$$

(vgl. Fig. 3.8 und auch § 1.4, Beispiel 3, Fig. 1.20) mit

$$\begin{aligned} |OA| &= R, \quad |AB| = r, \quad 0 < r < R, \\ (u, v)^\top &\in \Omega = [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \end{aligned}$$

Rechnung:

$$\begin{aligned} Y_u &= (R + r \sin v)(-\sin u, \cos u, 0)^\top, \\ Y_v &= r(\cos u \cos v, \sin u \cos v, -\sin v)^\top, \\ \mathcal{E} &= |Y_u|^2 = (R + r \sin v)^2, \quad \mathcal{F} = Y_u \cdot Y_v = 0, \quad \mathcal{G} = |Y_v|^2 = r^2 \quad (3.61) \\ N(u, v) &= -(\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)^\top. \\ N_u &= -(-\sin u \sin v, \cos u \sin v, 0)^\top. \\ N_v &= -(\cos u \cos v, \sin u \cos v, -\sin v)^\top. \end{aligned}$$

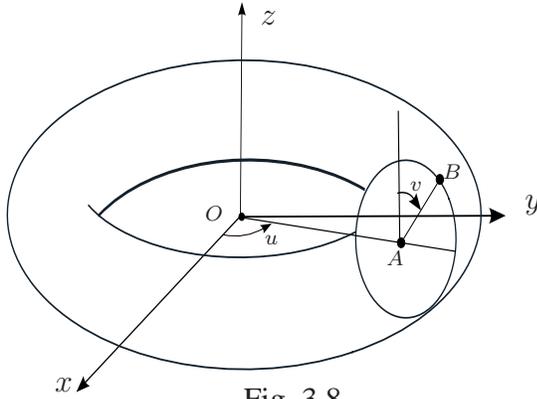


Fig. 3.8

Es ist also  $N = -X^1(u, v)$ , wobei  $X^1(u, v)$  eine Parametrisierung der Einheitskugel  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  ist (vgl. (3.58)). Es folgt

$$II = -DN \cdot DY = DX^1 \cdot DY \quad \text{auf } \mathbb{R}^2$$

und für die Koeffizienten ergibt sich

$$\begin{aligned} b_{11} &= \mathcal{L} = -N_u \cdot Y_u = \sin v (R + r \sin v), \\ b_{12} &= \mathcal{M} = -N_u \cdot Y_v = -N_v \cdot Y_u = 0, \\ b_{22} &= \mathcal{N} = -N_v \cdot Y_v = r |N_v|^2 = r. \end{aligned} \quad (3.62)$$

**Beispiel 3.40** Für die Graphenabbildung (3.14) (vgl. Beispiel 3.15) haben wir die Koeffizienten der erste Fundamentalform  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  (vgl. (3.32)) und den Normalenvektor  $N$  schon berechnet (vgl. (3.16)). Uns fehlen also noch die Koeffizienten der zweite Fundamentalform:

$$X_{uu} = (0, 0, f_{uu})^\top, \quad X_{uv} = (0, 0, f_{uv})^\top, \quad X_{vv} = (0, 0, f_{vv})^\top \quad (3.63)$$

und mit (3.11), (3.57),

$$\begin{aligned} b_{11} &= \mathcal{L} = N \cdot X_{uu} = \frac{f_{uu}}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}} = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \\ b_{12} &= \mathcal{M} = N \cdot X_{uv} = \frac{f_{uv}}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}} = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \\ b_{22} &= \mathcal{N} = N \cdot X_{vv} = \frac{f_{vv}}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}} = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Also

$$II(U, V) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}} D^2 f U \cdot V = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}} \begin{bmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{bmatrix} U \cdot V, \quad (3.65)$$

$U, V \in \mathbb{R}^2.$

**Beispiel 3.41** Rotationsflächen haben wir in Beispiel 3.16 eingeführt und die Koeffizienten der erste Fundamentalform  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  (vgl. (3.33)), sowie den Normalenvektor  $N$  (vgl. (3.19)) berechnet. Aus (3.18) folgt

$$\begin{aligned} X_{uu} &= -(f(v) \cos u, f(v) \sin u, 0)^\top, \\ X_{uv} &= (-f'(v) \sin u, f'(v) \cos u, 0)^\top, \\ X_{vv} &= (f''(v) \cos u, f''(v) \sin u, g''(v))^\top \end{aligned}$$

und somit ergibt sich für die Koeffizienten der zweite Fundamentalform:

$$\begin{aligned} b_{11} &= \mathcal{L} = N \cdot X_{uu} = -\frac{fg'}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}}, \\ b_{12} &= b_{21} = \mathcal{M} = N \cdot X_{uv} = 0, \\ b_{22} &= \mathcal{N} = N \cdot X_{vv} = \frac{f''g' - f'g''}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

### 3.4 DIE GEOMETRISCHE BEDEUTUNG DER ERSTEN FUNDAMENTALFORM

Man nennt die Erste Fundamentalform einer Fläche  $X$  auch oft die **Metrische Form**, denn mit ihr ist es möglich die Länge von Kurven und den Flächeninhalt von Flächen zu bestimmen.

Betrachte eine Kurve auf Spur  $X$ :

$$\begin{aligned} \omega : [a, b] &\rightarrow \Omega, \quad -\infty < a < b < +\infty, \quad \omega = (\omega^1, \omega^2), \\ \gamma &:= X \circ \omega : [a, b] \rightarrow S = \text{Spur } X \subset \mathbb{R}^3. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Die **Länge**  $L(\gamma)$  **der Kurve**  $\gamma$  ist:

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt = \int_a^b \sqrt{I(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt \quad (3.68)$$

(vgl. (2.5)), wobei gilt

$$\gamma'(t) = X_u(\omega(t))(\omega^1)'(t) + X_v(\omega(t))(\omega^2)'(t) \in T_{\omega(t)}X,$$

nach Definition der Ersten Fundamentalform.

Der **Flächeninhalt**  $A(X)$  der Fläche  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  lässt sich berechnen durch:

$$A(X) = \int_{\Omega} |X_u \times X_v| du dv. \quad (3.69)$$

Wegen  $\mathcal{W} = |X_u \times X_v| = \sqrt{|X_u|^2 |X_v|^2 - (X_u \cdot X_v)^2}$  (vgl. Lemma 1.27.iii) kann  $A(X)$  durch die Erste Fundamentalform ausgedrückt werden

$$A(X) = \int_{\Omega} \sqrt{\det G_X(u, v)} du dv = \int_{\Omega} \sqrt{\mathcal{E}(u, v)\mathcal{G}(u, v) - \mathcal{F}^2(u, v)} du dv. \quad (3.70)$$

Hierbei ist  $G_X$  die Fundamentalmatrix der Ersten Fundamentalform bzgl. der kanonischen Basis  $\{X_u, X_v\}$  von  $T_{(u,v)}X$  (vgl. (3.10)).

Wegen (3.70) nennt man

$$A(X)f = \int_{\Omega} f(u, v) \sqrt{\det G_X(u, v)} du dv \quad (3.71)$$

auch das **Flächenfunktional**.

**Bemerkung 3.42** Der Flächeninhalt  $A(X)$  ist invariant unter Parametertransformation: Ist  $\varphi : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$  eine Parametertransformation und  $\tilde{X} = X \circ \varphi$ , so gilt  $A(X) = A(\tilde{X})$ .

Dies folgt aus Gleichung (3.70), denn die Koeffizienten der Ersten Fundamentalform sind invariant unter Parametertransformation (vgl. Satz 3.23.ii).

**Beispiel 3.43** Die Matrix der Ersten Fundamentalform der Graphenfläche

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad X_f(u, v) := (u, v, f(u, v))^{\top},$$

(vgl. Beispiel 3.5) hat die Gestalt

$$G_f = \begin{bmatrix} 1 + f_u^2 & f_u f_v \\ f_u f_v & 1 + f_v^2 \end{bmatrix}, \quad \mathscr{W}^2 = \det G_f = 1 + |\nabla f|^2, \quad (3.72)$$

wobei  $\nabla f = (f_u, f_v)^{\top}$  (Gradient). Für den Flächeninhalt erhalten wir

$$A(X) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} \, du \, dv = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, du \, dv. \quad (3.73)$$

**Beispiel 3.44** Die Erste Fundamentalform des Torus

$$Y(u, v) = ((R + r \sin u) \cos v, (R + r \sin u) \sin v, r \cos u)^{\top}$$

(vgl. Beispiel 3.39) besitzt folgende Einträge

$$G_Y = \begin{bmatrix} (R + r \sin u)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}, \quad \mathscr{W} = \sqrt{\det G_Y} = r(R + r \sin u) \quad (3.74)$$

(vgl. Beispiel (3.61)). Für den Flächeninhalt erhalten wir also

$$A(Y) = r \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{2\pi - \varepsilon} \int_{\varepsilon}^{2\pi - \varepsilon} (R + r \sin u) \, du \, dv = 2\pi r R. \quad (3.75)$$

### 3.5 DIE GEOMETRISCHE BEDEUTUNG DER ZWEITEN FUNDAMENTALFORM

Sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , eine reguläre Fläche. Außerdem sei  $\omega : [0, \varepsilon] \rightarrow \Omega$ ,  $\varepsilon > 0$ , mit

$$\omega(0) = w, \quad \omega(t) = (\omega^1(t), \omega^2(t))^{\top} \quad (3.76)$$

eine glatte Kurve in  $\Omega$ , mit Anfangswert  $w \in \Omega$ . Dann ist

$$\gamma := X \circ \omega : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (3.77)$$

eine glatte Kurve auf der Fläche  $X$  (auf Spur  $X$ ) mit Anfangspunkt  $\gamma(0) = X(w)$  und mit Anfangsgeschwindigkeit  $\gamma'(0) = X_u(w)(\omega^1)'(0) + X_v(w)(\omega^2)'(0) \in T_w X$ . Im folgenden schreiben wir

$$(u^1, u^2) \quad \text{für} \quad (u, v).$$

Gemäß der Definition der Ersten Fundamentalform ist dann

$$|\gamma'(0)|^2 = I(\gamma'(0), \gamma'(0)).$$

Zunächst nehmen wir an, dass  $\gamma$  nach Bogenlänge  $s$  parametrisiert ist, also

$$\gamma = \gamma(s), \quad 0 \leq s \leq \ell, \quad |\gamma'(s)| \equiv 1$$

Dann ist  $t(s) := \gamma'(s)$  der Einheitstangentenvektor an  $\gamma$  in  $s$ , und

$$\kappa(s) := |t'(s)| = |\gamma''(s)| \tag{3.78}$$

die **Krümmung der Kurve** in  $s$ .

Falls  $\kappa(s) \neq 0$ , so lässt sich der **Normalenvektor**  $n(s)$  definieren durch

$$t'(s) = \kappa(s)n(s). \tag{3.79}$$

Im folgenden verwenden wir die **Einstein'sche Summenkonvention**: in einer Summe mit zweifach auftauchender Indexbezeichnung lassen wir das Summenzeichen weg. Beispielsweise kürzen wir wie folgt ab:

$$\sum_{k=1}^n \omega_k \gamma_k = \omega_k \gamma_k. \tag{3.80}$$

Aus

$$t(s) = \gamma'(s) = (\omega^\alpha)'(s) X_{u^\alpha}(\omega(s))$$

folgt

$$t'(s) = \gamma''(s) = (\omega^\alpha)''(s) X_{u^\alpha}(\omega(s)) + (\omega^\alpha)'(s) (\omega^\beta)'(s) X_{u^\alpha u^\beta}(\omega(s)).$$

Für  $s = 0$  multiplizieren wir skalar mit  $N = N(w)$  und verwenden die Gleichungen (3.39) und (3.47):

$$\begin{aligned} N \cdot t'(0) &= (N \cdot X_{u^\alpha u^\beta}(w)) (\omega^\alpha)'(0) (\omega^\beta)'(0) \\ &= (-N_{u^\alpha} \cdot X_{u^\beta}(w)) (\omega^\alpha)'(0) (\omega^\beta)'(0) = (N \circ \omega)'(0) (X \circ \omega)'(0) \end{aligned}$$

Nach Definition der Weingartenabbildung ist also

$$N \cdot t'(0) = S(w) \gamma'(0) \cdot \gamma'(0) = II(\gamma'(0), \gamma'(0))$$

bzw.

$$\kappa(0)N(w) \cdot n(0) = II(\gamma'(0), \gamma'(0)). \quad (3.81)$$

Nun betrachten wir die Vektorfelder  $N(s) := N(\omega(s))$  und  $\mathfrak{s}(s) := N(s) \times t(s)$  längs  $\gamma$  (vgl. Fig. 3.9).  $\{t(s), \mathfrak{s}(s), N(s)\}$  ist das begleitende orthonormale Dreibein längs  $\gamma$  (vgl. Definition 2.19):

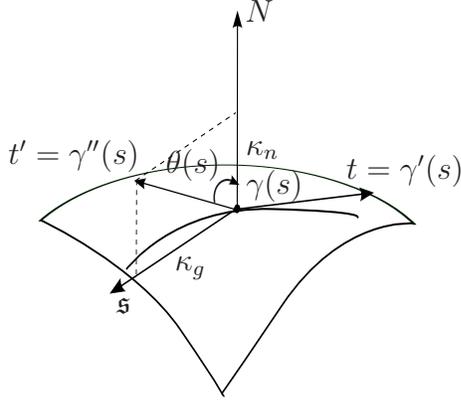


Fig. 3.9

$$N(s) \perp \mathfrak{s}(s), \quad N(s) \perp t(s), \quad t(s) \perp \mathfrak{s}(s) \quad (3.82)$$

und daher  $N(s) \perp T_{\omega(s)}X = \text{span}\{t(s), \mathfrak{s}(s)\}$  denn  $t(s)$  und  $\mathfrak{s}(s)$  sind linear unabhängig und  $T_{\omega(s)}X$  ist ein zweidimensionaler Raum.

Wegen  $t \cdot t' \equiv 0$  gehört  $t'(s)$  zu  $\text{span}\{N(s), \mathfrak{s}(s)\}$  und es gibt eindeutig bestimmte Funktionen  $\kappa_g(s)$ ,  $\kappa_n(s)$  mit

$$t'(s) = \kappa_g \mathfrak{s}(s) + \kappa_n N(s). \quad (3.83)$$

Wegen der Orthogonalitäten (3.82) gilt hierbei

$$\kappa_g(s) = t'(s) \cdot \mathfrak{s}(s) \quad \text{und} \quad \kappa_n(s) = t'(s) \cdot N(s). \quad (3.84)$$

**Definition 3.45** Man nennt  $\kappa_g(s)$  die **geodätische Krümmung** und  $\kappa_n(s)$  die **Normalkrümmung** der Kurve  $\gamma$  im Punkte  $s$ .

Es bezeichne  $\theta(s)$  den Winkel zwischen  $n(s)$  und  $N(s)$  (oder, was gleich ist, zwischen  $t'(s)$  und  $N(s)$ ), also

$$\theta(s) := \sphericalangle(n(s), N(s)) = \sphericalangle(t'(s), N(s)), \quad \cos \theta(s) = n(s) \cdot N(s). \quad (3.85)$$

Dann gilt, wegen der Orthogonalitäten (3.82) und wegen (3.83):

$$\begin{aligned} \kappa &= \sqrt{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}, \\ \kappa_g &= t' \cdot \mathfrak{s} = \kappa n \cdot \mathfrak{s} = \kappa \sin \theta, \\ \kappa_n &= N \cdot \mathfrak{s} = \kappa n \cdot N = \kappa \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Aus (3.81) und der dritten Formel in (3.86) folgt dann

$$\kappa_n(0) = II_{\omega(0)}(\gamma'(0), \gamma'(0)). \quad (3.87)$$

Für eine reguläre, nicht notwendig nach Bogenlänge parametrisierte Kurve  $\gamma(t)$ , erhalten wir aus

$$\frac{ds}{dt} = |\gamma'(t)| = [I(\gamma'(t), \gamma'(t))]^{1/2}$$

(vgl. (2.5) und (3.68)) und der Kettenregel das allgemeingültige Resultat

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\gamma}{ds} [I(\gamma'(t), \gamma'(t))]^{1/2}. \quad (3.88)$$

Lösen wir Gleichung (3.88) nach  $\frac{d\gamma}{ds}$  auf und setzen wir in (3.87) ein, dann bekommen wir das folgende Ergebnis:

$$\kappa_n = \frac{II(V, V)}{I(V, V)}, \quad V = \frac{d\gamma}{dt}. \quad (3.89)$$

Hierbei sind  $I(V, V)$  und  $II(V, V)$  die Werte der Ersten und der Zweiten Fundamentalform von  $X$  im Punkte  $w$ ,  $\kappa_n$  die Normalkrümmung im Punkte 0 einer Kurve

$$\gamma = X \circ \omega : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

auf  $X$  mit Anfangswerten

$$\gamma(0) = X(w), \quad \gamma'(0) = V.$$

Aus (3.89) erhalten wir sofort den

**Satz 3.46 (Meusnier).** *Ist die Fläche  $S := X(\Omega)$  eingebettet, so besitzen alle Kurven auf  $S$ , die durch einen festen Punkt  $p$  gehen und in  $p$  dieselbe Tangente haben, identische Normalkrümmungen.*

Betrachten wir insbesondere eingebettete Flächen  $X$ , und  $V$  sei der Geschwindigkeitsvektor eines *Normalschnitts*  $\gamma$  (d.h. gegeben mit Spur  $\gamma \subset S \cap \text{span}\{W, N\}$ ,  $W \in T_w X$ ,  $N = N(w)$ ). Dann sind  $n(0)$  und  $N(w)$  linear abhängig, also  $\theta(s) = 0$  und, wegen (3.86),

$$\kappa_g = 0 \quad \text{und} \quad \kappa_n = \pm \kappa. \quad (3.90)$$

In diesem Fall gilt also

$$\kappa = \pm \frac{II(V, V)}{I(V, V)}. \quad (3.91)$$

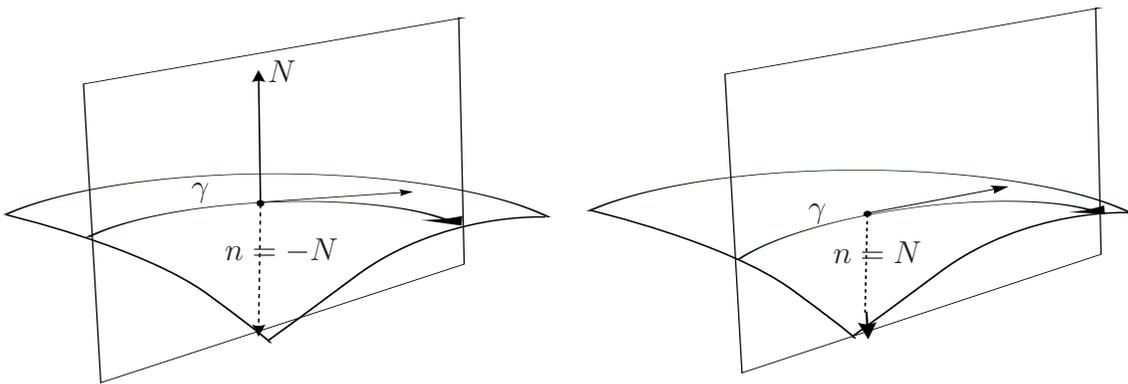


Fig. 3.10

Der **Rayleigh-Quotient**  $\frac{II(V, V)}{I(V, V)}$  misst also die Krümmungen aller möglichen Normalschnitte der Fläche  $X$  im Punkte  $X(w)$ . Das Vorzeichen des Quotienten bestimmt sich dadurch, ob  $n(0)$  in dieselbe Richtung zeigt wie  $N(w)$  oder in die entgegengesetzte Richtung (vgl. Fig. 3.10).

Da die Schmiegeebene durch  $\text{span}\{t, n\}$  gegeben ist, wird in (3.91) “+” gewählt, falls sich der Normalschnitt zu  $N$  *hinkrümmt* und das Vorzeichen “-”, falls sich der Normalschnitt von  $N$  *wegkrümmt*.

### 3.6 WEINGARTEN ABBILDUNG UND KRÜMMUNGEN

**Definition 3.47** *Die Funktionen*

$$\begin{aligned}\kappa_1(w) &:= \min \left\{ \frac{II(V, V)}{I(V, V)} : V \in T_w X \setminus \{0\} \right\} \\ &= \min \{ II(V, V) : V \in T_w X, I(V, V) = |V|^2 = 1 \},\end{aligned}\quad (3.92)$$

$$\begin{aligned}\kappa_2(w) &:= \max \left\{ \frac{II(V, V)}{I(V, V)} : V \in T_w X \setminus \{0\} \right\} \\ &= \max \{ II(V, V) : V \in T_w X, I(V, V) = |V|^2 = 1 \},\end{aligned}\quad (3.93)$$

heißen **Hauptkrümmungen** der Fläche  $X$  im Punkt  $w$  und

$$\rho_j(w) := \frac{1}{\kappa_j(w)}, \quad \text{falls } \kappa_j \neq 0, \quad j = 1, 2 \quad (3.94)$$

nennt man die **Hauptkrümmungsradien** im Punkt  $w$ .

Wir sollten uns hier an die folgende Darstellung erinnern

$$II(V, V) = II_w(V, V) = S(w)V \cdot V,$$

wobei  $S = S_w$  der Weingarten Abbildung heißt.

Da stetige Funktionen auf kompakten Mengen Maximum und Minimum annehmen, gibt es Tangentialvektoren  $V_1, V_2 \in T_w X$  mit

$$|V_1| = |V_2| = 1 \quad \text{und} \quad \kappa_1 = II(V_1, V_1), \quad \kappa_2 = II(V_2, V_2). \quad (3.95)$$

**Satz 3.48** *Die Hauptkrümmungen sind die Eigenwerte der Weingarten-Abbildung, es gilt also*

$$SV_j = \kappa_j V_j \quad \text{für} \quad j = 1, 2, \quad (3.96)$$

wobei die Eigenvektoren  $V_1, V_2 \in T_w X$  dieselben Vektoren sind wie in (3.95); sie heißen **Hauptkrümmungsrichtungen** von  $X$  im gegebenen Punkt und können orthogonal zueinander gewählt werden  $V_1 \cdot V_2 = 0$ .

**Beweis:** Die Minimum-Eigenschaft von  $\kappa_1$  impliziert, dass für alle  $\varepsilon \neq 0$  und beliebige  $V \in T_w X$  gilt:

$$II(V_1 + \varepsilon V, V_1 + \varepsilon V) \geq \kappa_1 I(V_1 + \varepsilon V, V_1 + \varepsilon V)$$

bzw.

$$II(V_1, V_1) + 2\varepsilon II(V_1, V) + \varepsilon^2 II(V, V) \geq \kappa_1 \{I(V_1, V_1) + 2\varepsilon I(V_1, V) + \varepsilon^2 I(V, V)\}$$

und Gleichheit wird erreicht mit  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Wegen  $I(V_1, V_1) = 1$  und  $II(V_1, V_1) = \kappa_1 I(V_1, V_1) = \kappa_1$  folgt

$$2\varepsilon \{II(V_1, V) - \kappa_1 I(V_1, V)\} + \varepsilon^2 \{II(V, V) - \kappa_1 I(V, V)\} \geq 0,$$

so dass nach Division durch  $\varepsilon$  und  $\varepsilon \rightarrow 0$  für beliebige  $V \in T_w X$  Gleichheit eintritt:

$$II(V_1, V) - \kappa_1 I(V_1, V) = 0 \quad \iff \quad SV_1 \cdot V = \kappa_1 V_1 \cdot V.$$

Daraus folgt (3.96) für  $\kappa_1$ .

Maximum-Eigenschaft von  $\kappa_2$  impliziert in ähnlicher Weise, dass  $SV_2 = \kappa_2 V_2$ .

Wegen der Symmetrie  $II(U, V) = II(V, U)$  (vgl. Satz 3.29) ist auch die Weingarten-Abbildung  $S$  symmetrisch:

$$SU \cdot V = II(U, V) = II(V, U) = SV \cdot U = U \cdot SV \quad (3.97)$$

und falls  $\kappa_1 \neq \kappa_2$ , so folgt aus der Selbstadjungiertheit (3.97)

$$\kappa_1 V_1 \cdot V_2 = SV_1 \cdot V_2 = V_1 \cdot SV_2 = \kappa_2 V_1 \cdot V_2,$$

d.h.  $V_1 \cdot V_2 = 0$ . ■

**Definition 3.49** Im Fall  $\kappa_1(w) = \kappa_2(w)$ , nennt man  $w$  einen **Nabelpunkt** von  $X$ .

Nabelpunkte  $w$  mit  $\kappa_1(w) = \kappa_2(w) = 0$  heißen **Flachpunkte**.

Da die Gleichheit

$$\kappa_1 = \min_{|V|=1} II(V, V) = \max_{|V|=1} II(V, V) = \kappa_2$$

impliziert, dass  $II(V, V) \equiv \kappa_1$ , für alle Tangentenvektoren  $V \in T_w X$  mit Norm eins  $|V| = 1$ , können wir wählen:

$$SV_j = \kappa_1 V_j, \quad V_j \in T_w X, \quad |V_j| = 1 \quad j = 1, 2, \quad V_1 \cdot V_2 = 0. \quad (3.98)$$

**Beispiel 3.50** Einfache Beispiele:

1. Eine Kugel mit Radius  $R > 0$  besteht aus Nabelpunkten mit  $\kappa = \frac{1}{R}$  (vgl. Beispiel 3.38).

2. Eine Ebene besteht nur aus Flachpunkten.

3. Für  $f(u, v) = u^4 + v^4$  und  $X = X_f$  ist  $(0, 0)$  ein nicht-ebener Flachpunkt.

**Satz 3.51** *Ist jeder Punkt einer Fläche  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Nabelpunkt, und ist  $X$  zusammenhängend, so ist  $X(\Omega)$  Teil einer Ebene oder einer Sphäre.*

**Beweis:** Sobald alle Eigenwerte der Matrix  $S(w)$  gleich sind  $\lambda(w) = \kappa_1(w) = \kappa_2(w)$ , sind die Eigenvektoren  $V_1$  und  $V_2$  in (3.98) wegen ihrer Orthogonalität linear unabhängig und erzeugen den Tangentialraum  $T_w = \text{span}\{V_1, V_2\}$ . Aber dann ist wegen (3.98)  $S(w) = \lambda(w)I$ , ein Vielfaches der Einheitsmatrix:

$$\forall V = \alpha V_1 + \beta V_2 \in T_w X, \quad SV = S(\alpha V_1 + \beta V_2) = \lambda(w)(\alpha V_1 + \beta V_2) = \lambda(w)V. \quad (3.99)$$

Da nach Definition der Weingarten Matrix  $S = -DN DX^{-1}$  (vgl. (3.43)) ist

$$SX_u = -N_u, \quad SX_v = -N_v \quad (3.100)$$

und mit  $V = V^1 X_u(w) + V^2 X_v(w)$  gilt

$$-V^1 N_u(w) - V^2 N_v(w) = \lambda(w)[V^1 X_u(w) + V^2 X_v(w)]$$

für alle  $V^1, V^2 \in \mathbb{R}$ . Es folgt

$$-N_u(w) = \lambda(w)X_u(w), \quad -N_v(w) = \lambda(w)X_v(w). \quad (3.101)$$

Differentiation und Subtraktion liefern

$$\begin{aligned} -N_{uv}(w) &= \lambda_v(w)X_u(w) + \lambda(w)X_{uv}(w), \\ -N_{vu}(w) &= \lambda_u(w)X_v(w) + \lambda(w)X_{uv}(w), \\ \hline 0 &\equiv \lambda_v(w)X_u(w) - \lambda_u(w)X_v(w). \end{aligned}$$

Aber  $X_u, X_v$  sind linear unabhängige Vektoren, so dass für  $w \in \Omega$  gilt:

$$\lambda_u(w) \equiv \lambda_v(w) \equiv 0.$$

Da  $\Omega$  zusammenhängend ist, erhalten wir

$$\lambda(w) \equiv \lambda = \text{const}.$$

- Ist  $\lambda = 0$ , so gilt  $N_u = N_v \equiv 0$ , d.h.  $N \equiv \text{const}$ . Dann ist aber auch  $(X \cdot N)_u \equiv (X \cdot N)_v \equiv 0$ , das bedeutet

$$X \cdot N \equiv \text{const}.$$

Also liegt  $X(\Omega)$  in einer affinen Ebene, senkrecht zu  $N$ .

- Ist  $\lambda \neq 0$ , so betrachte man die Abbildung

$$(u, v) \mapsto Y(u, v) := X(u, v) + \frac{1}{\lambda}N(u, v).$$

Aus den Beziehungen (3.99) bzw. (3.101) folgt, dass

$$Y_u(u, v) \equiv Y_v(u, v) \equiv 0$$

und damit, dass diese Abbildung konstant ist, d.h.

$$X(w) + \frac{1}{\lambda}N(w) \equiv Y(w) \equiv Y_0 \in \mathbb{R}^3, \quad \forall w \in \Omega.$$

Also gilt

$$\left| X(w) - Y_0 \right| = \left| \frac{1}{\lambda}N(w) \right| = \frac{1}{|\lambda|}$$

für beliebige  $w \in \Omega$ . Damit ist  $X(\Omega)$  Teil einer Sphäre mit Zentrum in  $Y_0$  und Radius  $1/|\lambda|$ . ■

Von besonderer geometrischer Bedeutung sind die elementarsymmetrischen Funktionen der beiden Hauptkrümmungen.

**Definition 3.52** *Man nennt das arithmetische Mittel*

$$H := \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) \tag{3.102}$$

die **Mittlere Krümmung** und *Quadrat des geometrischen Mittels*

$$K := \kappa_1 \kappa_2 \tag{3.103}$$

die **Gauß'sche Krümmung** von  $X$  in  $w$ .

Oft führt man noch eine Dritte Fundamentalform III ein:

$$\begin{aligned} I(V, W) &= V \cdot W, & II(V, W) &= SV \cdot W, \\ III(V, W) &= SV \cdot SW = S^2 \cdot W, & V, W &\in T_w X. \end{aligned} \tag{3.104}$$

**BEMERKUNG:** Die Weingartenabbildung heißt auch **Form-Operator** ( Englisch: Shape-operator S!).

Der Zusammenhang zwischen den drei Fundamentalformen wird im folgenden Lemma hergestellt.

**Lemma 3.53** *Für die drei Fundamentalformen aus (3.104) gilt die Gleichung:*

$$III(V, W) - 2H II(V, W) + K I(V, W) = 0, \quad V, W \in T_w X, \tag{3.105}$$

wobei  $H$  die Mittlere und  $K$  die Gauß'sche Krümmung bezeichnet.

**Beweis I:** Für festes  $w \in \Omega$  sei  $E : T_w X \rightarrow T_w X$  die identische Abbildung,  $S = S(w)$  die Weingarten-Abbildung,  $H = H(w)$  die Mittlere und  $K = K(w)$  die Gauß'sche Krümmung. Für das charakteristische Polynom  $\mathcal{P}$  von  $S$  gilt dann

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det(S - \lambda E) = (\lambda - \kappa_1)(\lambda - \kappa_2) = \lambda^2 - 2H\lambda + K.$$

Aus dem Satz von Cayley-Hamilton folgt dann, dass die Abbildung

$$\mathcal{P}(S) = 0 = S^2 - 2HS + KE \quad (3.106)$$

Null ist und (3.105) folgt.

**Beweis II:** Man kann aber (3.105) auch direkt nachrechnen. Dazu setze

$$IV(V, W) := (S - \kappa_1 E)(V) \cdot (S - \kappa_2 E)(W), \quad V, W \in T_w X.$$

Dann ist offenbar

$$IV = III - 2HIII + KI.$$

Andererseits gilt für die Hauptkrümmungsrichtungen  $V_1, V_2$ :

$$IV(V_1, V) = 0 = IV(V, V_2) \quad \forall V \in T_w X. \quad (3.107)$$

Da aber  $\{V_1, V_2\}$  eine Basis von  $T_w X$  und  $IV$  eine quadratische Form ist, schließen wir aus (3.105):  $IV \equiv 0$ , also (3.105). ■

**Korollar 3.54** *die Dritte Fundamentalform ist bereits durch I und II eindeutig bestimmt:*

$$III(V, W) = 2H II(V, W) - K I(V, W), \quad V, W \in T_w X.$$

**Lemma 3.55** *Die Matrix*

$$S_X = B_X G_X^{-1} = \begin{bmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{bmatrix}. \quad (3.108)$$

aus dem Gleichungssystem (3.112) heißt **Weingarten Matrix** (vgl. (3.56)), die Weingarten Matrix besitzt die Einträge

$$b_\alpha^\beta = b_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta}, \quad (3.109)$$

wobei  $B_X = [b_{jk}]_{2 \times 2}$  die Matrix der erste Fundamentalform und  $G_X^{-1} = [g^{jk}]_{2 \times 2}$  die Inverse zu der Matrix der erste Fundamentalform  $G_X = [g_{jk}]_{2 \times 2}$  darstellen:

$$G_X = \begin{bmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \mathcal{F} & \mathcal{G} \end{bmatrix}, \quad B_X = \begin{bmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{bmatrix}, \quad G_X^{-1} = \frac{1}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} \begin{bmatrix} \mathcal{G} & -\mathcal{F} \\ -\mathcal{F} & \mathcal{E} \end{bmatrix}. \quad (3.110)$$

**Beweis:** Um die Weingarten Matrix  $S_X = [b_\alpha^\beta]_{2 \times 2}$  zu berechnen, erinnern wir uns daran, dass  $S_X$  die Matrix des Basiswechsels ist (vgl. Gleichungen (3.43) und (3.100)) und schreiben das Gleichungssystem (3.100) folgenderweise um (genannt **Weingarten Gleichungen**):

$$\begin{cases} N_{u^1} = -b_1^1 X_{u^1} - b_1^2 X_{u^2}, \\ N_{u^2} = -b_2^1 X_{u^1} - b_2^2 X_{u^2}. \end{cases} \quad (3.111)$$

Die Koeffizienten in (3.111) sind eindeutig bestimmt. Das System lässt sich auch kürzer schreiben:

$$N_{u^\alpha} = -b_\alpha^\beta X_{u^\beta}. \quad (3.112)$$

Multipliziert man das Weingarten-System (3.112) mit  $X_\gamma$ , so erhält man

$$N_{u^\alpha} \cdot X_{u^\gamma} = -b_\alpha^\beta X_{u^\beta} \cdot X_{u^\gamma} \quad \text{bzw.} \quad b_{\alpha\gamma} = -b_\alpha^\beta g_{\beta\gamma}. \quad (3.113)$$

Da  $G_X^{-1}$  invers zu  $G_X$  ist und damit auch symmetrisch (wie  $G_X$  selbst; vgl. (3.23)), erhalten wir:

$$g^{\alpha\beta} = g^{\beta\alpha} \quad \text{und} \quad g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma} = \begin{cases} 1, & \alpha = \gamma \\ 0, & \alpha \neq \gamma \end{cases}.$$

Aus Beziehung (3.113) folgt dann

$$-b_{\alpha\gamma} g^{\gamma\nu} = b_\alpha^\beta g_{\beta\gamma} g^{\gamma\nu} = b_\alpha^\beta \delta_{\beta\nu} = b_\alpha^\nu$$

und die Weingarten-Gleichungen (3.109) ist gezeigt. ■

**Bemerkung 3.56** *Der klassischen Schreibweise gemäß, multiplizieren wir das Gleichungssystem mit  $X_{u^1}$  und  $X_{u^2}$ . Dann erhalten wir unter Beachtung der Gleichungen (3.26) und (3.45):*

$$\begin{cases} \mathcal{L} = b_1^1 \mathcal{E} + b_1^2 \mathcal{F}, \\ \mathcal{M} = b_1^1 \mathcal{F} + b_1^2 \mathcal{G}, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{M} = b_2^1 \mathcal{E} + b_2^2 \mathcal{F}, \\ \mathcal{N} = b_2^1 \mathcal{F} + b_2^2 \mathcal{G}. \end{cases} \quad (3.114)$$

Die Lösung bestätigt die Formeln (3.109) für Einträge der Weingarten Matrix:

$$\begin{aligned} b_1^1 &= \frac{\mathcal{G}\mathcal{L} - \mathcal{F}\mathcal{M}}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}, & b_1^2 &= \frac{\mathcal{E}\mathcal{M} - \mathcal{F}\mathcal{L}}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}, \\ b_2^1 &= \frac{\mathcal{G}\mathcal{M} - \mathcal{F}\mathcal{N}}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}, & b_2^2 &= \frac{\mathcal{E}\mathcal{N} - \mathcal{F}\mathcal{M}}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Nun sind die Hauptkrümmungen  $\kappa_1, \kappa_2$  die Eigenwerte der Weingarten Matrix  $S$ , d.h. die Lösungen der Gleichung

$$SV - \kappa V = 0, \quad V \in T_w X.$$

Da  $S_X = G_X^{-1} B_X$  (vgl. (3.108)) ist, nimmt die Gleichung die folgende Gestalt:

$$\det [B_X - \kappa G_X] = 0.$$

Deshalb erhalten wir folgende Formel für die **Gauß'sche Krümmung**  $K_X$  und die **mittlere Krümmung**  $H_X$ :

$$K_X = \kappa_1 \kappa_2 = \det S_X = \det [G_X^{-1} B_X] = \frac{\mathcal{L} \mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{\mathcal{E} \mathcal{G} - \mathcal{F}^2} \quad (3.116)$$

$$H_X = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} [G_X^{-1} B_X] = \frac{1}{2} [\kappa_1 + \kappa_2] = \frac{\mathcal{L} \mathcal{G} + \mathcal{N} \mathcal{E} - 2 \mathcal{M} \mathcal{F}}{2(\mathcal{E} \mathcal{G} - \mathcal{F}^2)}. \quad (3.117)$$

$\operatorname{Tr} \mathcal{A}$  bezeichnet hier die **Spur** der Matrix  $\mathcal{A} = [a_{jk}]_{n \times n}$ , also  $\operatorname{Tr} \mathcal{A} = a_{jj} = \sum_{j=1}^n a_{jj}$ .

Bei (3.116) und (3.117) handelt es sich um explizite Formeln zur Berechnung der Mittleren Krümmung und der Gauß'schen Krümmung aus den Koeffizienten der Ersten und Zweiten Fundamentalform.

**Korollar 3.57** Für Flächen mit der Eigenschaft  $\mathcal{F} = \mathcal{M} = 0$ , erhalten wir

$$G_X = \begin{bmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{G} \end{bmatrix}, \quad B_X = \begin{bmatrix} \mathcal{L} & 0 \\ 0 & \mathcal{N} \end{bmatrix}, \quad S_X = B_X G_X^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{E}} & 0 \\ 0 & \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{G}} \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

und damit

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{E}}, & \kappa_2 &= \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{G}}, \\ K_X = \det S_X = \kappa_1 \kappa_2 &= \frac{\mathcal{L} \mathcal{N}}{\mathcal{E} \mathcal{G}}, & H_X = \frac{1}{2} [\kappa_1 + \kappa_2] &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{E}} + \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{G}} \right]. \end{aligned} \quad (3.119)$$

Aus den Weingarten Gleichungen (3.112), Lemma 1.27.vi und der Gleichung (3.116) folgt unmittelbar

$$N_{u^1} \times N_{u^2} = \det[-b_k^j]_{2 \times 2} X_{u^1} \times X_{u^2} = \det S_X X_{u^1} \times X_{u^2} = K_X X_{u^1} \times X_{u^2}. \quad (3.120)$$

Es sei nun

$$w_0 \in \Omega, \quad \varepsilon > 0 \quad \text{und} \quad \Omega_\varepsilon = \Omega_\varepsilon(w_0) = \{w \in \Omega : |w - w_0| < \varepsilon\}.$$

Dann gilt für die "Flächeninhalte" unter  $X$  (vgl. (3.69)), bzw.  $N$

$$\begin{aligned} A_{\Omega_\varepsilon}(X) &= \int_{\Omega_\varepsilon} |X_{u^1} \times X_{u^2}| du^1 du^2, \\ A_{\Omega_\varepsilon}(N) &= \int_{\Omega_\varepsilon} |N_{u^1} \times N_{u^2}| du^1 du^2 = \int_{\Omega_\varepsilon} |K_X(u)| |X_{u^1} \times X_{u^2}| du^1 du^2. \end{aligned}$$

Da die Integranden stetige Funktionen sind, und  $|X_{u^1} \times X_{u^2}| > 0$ , folgt aus dem MWS der Integralrechnung die folgende alternative Definition der Hauptkrümmung  $K_X$ , welche die ursprüngliche Definition der Hauptkrümmung durch Gauß war:

$$|K_X(w_0)| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A_{\Omega_\varepsilon}(N)}{A_{\Omega_\varepsilon}(X)}. \tag{3.121}$$

Da  $K_X \neq 0$  in einer Umgebung von  $w \in \Omega$ , ist die Flächennormale  $\tilde{N} := \frac{N_{u^1} \times N_{u^2}}{|N_{u^1} \times N_{u^2}|}$  wohldefiniert (vgl. (3.120)).

**Korollar 3.58** Die Orientierung der Fläche  $X$  sei bestimmt. Ist nun  $K_X \neq 0$  in einer Umgebung von  $w \in \Omega$ , so sind die Dreieine  $\{X_u, X_v, N\}$  und  $\{N_u, N_v, \tilde{N}\}$  in  $w$  gleichsinnig orientiert, falls  $K_X(w) > 0$ , und entgegengesetzt orientiert, wenn  $K_X(w) < 0$ .

**Beweis:** Es gilt

$$\tilde{N} = N \quad \text{für} \quad K > 0, \quad \tilde{N} = -N \quad \text{für} \quad K < 0. \quad \blacksquare$$

### 3.7 EINGEBETTETE FLÄCHEN

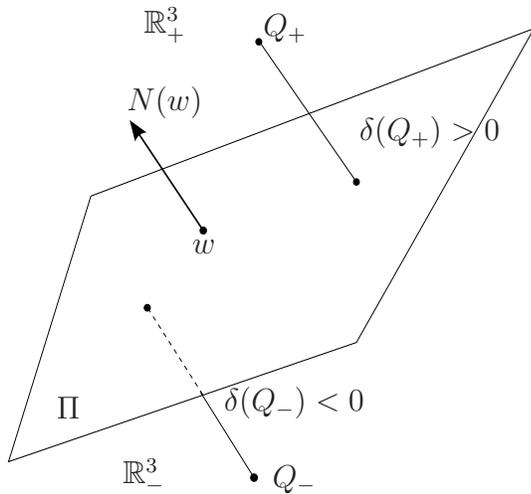


Fig. 3.11

Es sei  $w \in \Omega$  fest und  $\Pi := X(w) + T_w X$  die affine Tangentialebene an  $X$  im Punkt  $X(w)$ . Die Fläche sei weiterhin orientiert durch  $N(w)$ , d.h.  $\{X_{u^1}, X_{u^2}\}$  ist positiv orientiert. Dann wird  $\mathbb{R}^3$  durch  $\Pi$  in zwei offene Halbräume  $\mathbb{R}^3_+$  und  $\mathbb{R}^3_-$  zerlegt, wobei  $N(w)$  in Richtung  $\mathbb{R}^3_+$  zeigt. Für  $Q \in \mathbb{R}^3$  bezeichne  $\delta(Q)$  den orientierten Abstand von  $Q$  zu  $\Pi$ , d.h.

$$\begin{aligned} \delta(Q) &\geq 0 \quad \text{für} \quad Q \in \mathbb{R}^3_+, \\ \delta(Q) &\leq 0 \quad \text{für} \quad Q \in \mathbb{R}^3_- \end{aligned}$$

Es sei nun  $Q = X(w + h)$  ein Punkt auf der Fläche  $X$ , nahe  $X(w)$ , und  $h = (h^1, h^2)^T \in \mathbb{R}^2$  sei klein, also  $|h| \ll 1$ .

Durch Anwendung der Taylor'schen Formel erhalten wir

$$X(w + h) = X(w) + X_{u^\alpha}(w)h^\alpha + \frac{1}{2}X_{\alpha,\beta}X_{u^\alpha u^\beta}(w)h^\alpha h^\beta + o(|h|^2).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \delta(Q) &:= (Q - X(w)) \cdot N(w) = (X(w + h) - X(w)) \cdot N(w) \\ &= \frac{1}{2}X_{u^\alpha u^\beta}(w) \cdot N(w)h^\alpha h^\beta + o(|h|^2) = -\frac{1}{2}N_{u^\alpha} \cdot X_{u^\beta}(w)h^\alpha h^\beta + o(|h|^2) \end{aligned}$$

(vgl. (3.45)) und nach Definition der Zweiten Fundamentalform

$$\delta(Q) = \frac{1}{2} II_w(V_h, V_h) + o(|h|^2) \quad \text{bei } h \rightarrow 0, \quad (3.122)$$

wobei  $V_h = h^\alpha X_{u^\alpha}(w)$  den Tangentenvektor von  $X(w)$  nach  $Q = X(w + h)$  bezeichnet.

**Korollar 3.59** Die Größe  $\frac{1}{2} II_w(V_h, V_h)$  misst die Höhe (in Richtung  $N(w)$ ) der Fläche  $X$  über der Tangentialebene  $\Pi$  an  $X$  im Punkt  $X(w)$  (bis auf Fehlerterme von höherer als zweiter Ordnung). ■

**Definition 3.60** Ein Punkt  $X(w) \in \text{Spur } X$  heißt:

A. Elliptisch, falls  $K_X(w) > 0$ ,

A.I Eigentlicher Nabelpunkt, falls  $\kappa_1 = \kappa_2 \neq 0$  (vgl. Definition (3.49)),

B. Parabolisch, falls  $K_X(w) = 0$ ,

B.I Flachpunkt, falls  $S_X(w) = 0$  (vgl. Definition (3.49)).

C. Hyperbolisch, falls  $K_X(w) < 0$ ,

Und schließlich, Nabelpunkt, falls  $\kappa_1 = \kappa_2$  (könnte beides-eigentlicher Nabelpunkt oder Flachpunkt sein; vgl. Definition (3.49)).

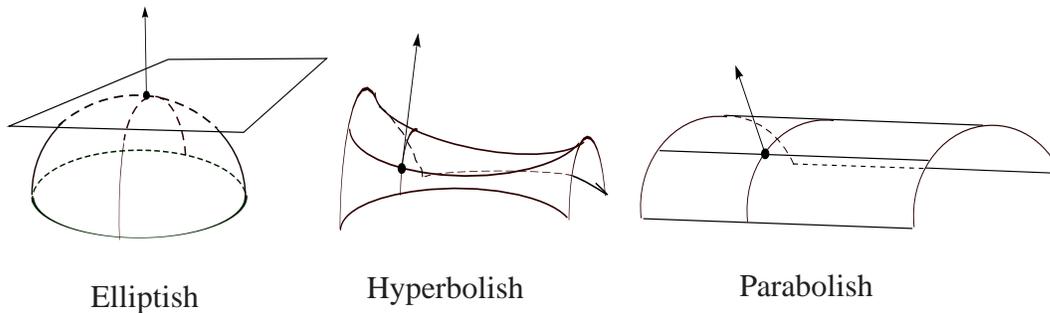


Fig. 3.12

Nun ist, wegen (3.122),  $II_w$  eine (positiv oder negativ) definite quadratische Form, falls  $K_X(w) > 0$  (äquivalent:  $\kappa_1 > 0, \kappa_2 > 0$  oder  $\kappa_1 < 0, \kappa_2 < 0$ ); damit hat  $\delta(Q)$  nahe  $w$  nur ein Vorzeichen. Also liegt  $X$  lokal auf einer Seite der Tangentialebene  $\Pi$ . Andererseits ist  $II_w$  indefinit, falls  $K_X(w) < 0$ , und es gilt für jede Umgebung  $U$  von  $X(w)$

$$U \cap \text{Spur } X \cap \mathbb{R}_+^3 \neq \emptyset \neq U \cap \text{Spur } X \cap \mathbb{R}_-^3.$$

Bei parabolischen Punkten können beide Fälle auftreten.

**Definition 3.61** Nun sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  wieder eine beliebige parametrisierte Fläche.

Eine glatte Kurve  $\gamma := X \circ \omega$  auf  $X$ , d.h.

$$\gamma(t) = X(\omega^1(t), \omega^2(t)), \quad t \in I \subset \mathbb{R}$$

heißt:

- **geodätische Kurve** auf  $X$  (kurz: eine **Geodätische** auf  $X$ ), falls ihre geodätische Krümmung  $\kappa_g(t)$  für alle  $t \in I$  verschwindet:  $\kappa_g \equiv 0$  (vgl. Definition 3.45).
- **Asymptotenlinie** auf  $X$ , falls ihre Normalkrümmung  $\kappa_n$  identisch verschwindet:  $\kappa_n \equiv 0$  (vgl. Definition 3.45).

Ist  $\gamma(t)$  eine Asymptotenlinie, so gilt offenbar ( $\kappa_n = (\kappa_n) \cdot N$ )

$$T_{\omega(t)}X = \text{Schmiegebene in } \gamma(t) = \text{span}\{\gamma'(t), n(t)\}.$$

Gemäß (3.89) gilt  $\kappa_n = \frac{II_\omega(\gamma', \gamma')}{I_\omega(\gamma', \gamma')}$  und damit  $\kappa_n \equiv 0$  ist äquivalent zu  $II_\omega(\gamma', \gamma') \equiv 0$  bzw. zu

$$\mathcal{L}(\omega)[(\omega^1)']^2 + 2\mathcal{M}(\omega)(\omega^1)'(\omega^2)' + \mathcal{N}(\omega)[(\omega^2)']^2 \equiv 0. \quad (3.123)$$

**Lemma 3.62** Lösungen der Gleichung (3.123) sind genau die Asymptotenlinien auf  $X$ .

Im Fall  $K_X > 0$  hat (3.123) keine Lösungen, d.h. es gibt bei  $K_X > 0$  keine Asymptotenlinien auf  $X$ .

Ist dagegen  $K_X < 0$  überall auf  $\Omega$ , so gibt es zu jedem  $w \in \Omega$  genau zwei Asymptotenlinien durch  $X(w)$ .

**Beweis.** Existenz von zwei Lösungen von (3.123) ist äquivalent zu  $\mathcal{M}^2 - \mathcal{L}\mathcal{N} > 0$ . Da  $\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2 > 0$  gilt, folgt wegen Formel (3.116)  $K_X < 0$ . ■

**Definition 3.63** Eine Kurve  $\gamma = X \circ \omega$  heißt **Krümmungslinie** auf  $X$ , falls für jedes  $t$  der Tangentenvektor  $\gamma'(t)$  eine Hauptkrümmungsrichtung von  $X$  in  $w = \gamma(t)$  ist, d.h. falls gilt

$$S(\omega(t))\gamma'(t) = \kappa(t)\gamma'(t), \quad (3.124)$$

wobei  $\kappa(t)$  eine der Hauptkrümmungen ist: entweder  $\kappa(t) = \kappa_1(\omega(t))$  oder  $\kappa(t) = \kappa_2(\omega(t))$ .

Da  $\gamma' = X_{u^1}(u^1)' + X_{u^2}(u^2)'$  ist (3.124), wegen (3.100), äquivalent zu

$$-N_{u^1}(\omega)(u^1)' - N_{u^2}(\omega)(u^2)' = \kappa[X_{u^1}(u^1)' + X_{u^2}(u^2)'], \quad (3.125)$$

d.h. zu

$$\frac{d}{dt}(N \circ \omega) = \kappa \frac{d}{dt}(X \circ \omega). \quad (3.126)$$

Die Anwendung der Weingarten-Gleichungen (3.111), (3.115) zu (3.125) und ein Koeffizientenvergleich von  $X_{u^k}$  liefert

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}\mathcal{M} - \mathcal{G}\mathcal{L}}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}(u^1)' + \frac{\mathcal{F}\mathcal{N} - \mathcal{G}\mathcal{M}}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}(u^2)' &= \kappa(u^1)', \\ \frac{\mathcal{F}\mathcal{L} - \mathcal{E}\mathcal{M}}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}(u^1)' + \frac{\mathcal{F}\mathcal{M} - \mathcal{E}\mathcal{N}}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}(u^2)' &= \kappa(u^2)'. \end{aligned} \quad (3.127)$$

Durch Multiplikation mit  $(u^2)'$  bzw.  $-(u^1)'$  sowie Addition und Multiplikation mit  $W^2 = \mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2$  erhalten wir

$$(\mathcal{E}\mathcal{M} - \mathcal{F}\mathcal{L})[(u^1)']^2 + (\mathcal{E}\mathcal{N} - \mathcal{G}\mathcal{L})(u^1)'(u^2)' + (\mathcal{F}\mathcal{N} - \mathcal{G}\mathcal{M})[(u^2)']^2 = 0 \quad (3.128)$$

bzw.

$$\det \begin{bmatrix} [(u^1)']^2 & -(u^1)'(u^2)' & [(u^2)']^2 \\ \mathcal{E} & \mathcal{F} & \mathcal{G} \\ \mathcal{L} & \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{bmatrix} \equiv 0. \quad (3.129)$$

**Bemerkung 3.64** *Man nennt:*

(3.123) die Differentialgleichungen der Asymptotenlinien,

(3.126) oder (3.128) bzw. (3.129) die Differentialgleichungen der Krümmungslinien.

Die Differentialgleichungen der Geodätischen werden wir später, in § 4.5 herleiten (vgl. (4.150)).

**Beispiel 3.65** Für eine Graphenfläche (3.14) (vgl. Beispiel 3.15 und Beispiel 3.43) haben wir die Koeffizienten der ersten und zweiten Fundamentalform sowie den Normalenvektor  $N$  berechnet (vgl. (3.32), (3.64) sowie (3.16)):

$$G_X = \begin{bmatrix} 1 + f_u^2 & f_u f_v \\ f_u f_v & 1 + f_v^2 \end{bmatrix}, \quad B_X = \frac{1}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \begin{bmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{bmatrix}. \quad (3.130)$$

Damit erhalten wir

$$K_X = \det S_X = \frac{\det B_X}{\det G_X} = \frac{f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^2} \quad (3.131)$$

(vgl. (3.116)) für die Gauß'sche Krümmung und

$$H_f = \frac{\mathcal{E}\mathcal{N} - 2\mathcal{F}\mathcal{M} + \mathcal{G}\mathcal{L}}{2(\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2)} = \frac{f_{uu}(1 + f_v^2) - 2f_{uv}f_u f_v + f_{vv}(1 + f_u^2)}{2(1 + f_u^2 + f_v^2)^{3/2}} \quad (3.132)$$

(vgl. (3.117)) für die mittlere Krümmung.

**Bemerkung 3.66** Flächen mit verschwindender Mittlerer Krümmung heißen **minimalflächen**. Der Graph einer Funktion  $f$  ist also genau dann eine Minimalfläche, wenn  $f$  Lösung der **Minimalflächengleichung** ist, die wegen (3.132) lautet:

$$(\text{MFG}) \quad f_{uu}(1 + f_v^2) - 2f_{uv}f_u f_v + f_{vv}(1 + f_u^2) = 0. \quad (3.133)$$

## 3.8 ROTATIONSFLÄCHEN

Für Rotationsflächen

$$X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))^T, \quad f(v) > 0,$$

haben wir die Koeffizienten der ersten und zweiten Fundamentalform berechnet (vgl. Beispiel 3.16 und Beispiel 3.41). Da die Bedingungen  $\mathcal{F} = \mathcal{M} = 0$  erfüllt sind (vgl. (3.33) und (3.66)), folgt aus Korollar 3.57

$$G_X = \begin{bmatrix} f^2 & 0 \\ 0 & [f']^2 + [g']^2 \end{bmatrix}, \quad B_X = \frac{1}{\sqrt{[f']^2 + [g']^2}} \begin{bmatrix} -fg' & 0 \\ 0 & f''g' - f'g'' \end{bmatrix},$$

$$S_X = \frac{1}{\sqrt{[f']^2 + [g']^2}} \begin{bmatrix} -\frac{g'}{f} & 0 \\ 0 & \frac{f''g' - f'g''}{[f']^2 + [g']^2} \end{bmatrix}. \quad (3.134)$$

Damit lassen sich die Hauptkrümmungen mittels folgender Formeln berechnen:

$$\kappa_1 = -\frac{g'}{f\sqrt{[f']^2 + [g']^2}}, \quad \kappa_2 = \frac{f''g' - f'g''}{([f']^2 + [g']^2)^{3/2}}. \quad (3.135)$$

Mit Hilfe (3.134) erhalten wir

$$K_f = \det S_X = \kappa_1 \kappa_2 = -\frac{g'}{f} \cdot \frac{f''g' - f'g''}{([f']^2 + [g']^2)^2} \quad (3.136)$$

für die Gauß'sche Krümmung und

$$H_f = \frac{1}{2}[\kappa_1 + \kappa_2] = \frac{-g'[[f']^2 + [g']^2] + f[f''g' - f'g'']}{2f[[f']^2 + [g']^2]^{3/2}} \quad (3.137)$$

für die Mittlere Krümmung (vgl. (3.116) und (3.117)).

Diese Formeln vereinfachen sich, wenn die erzeugende Kurve  $(f(v), g(v))^T$  nach Bogenlänge parametrisiert ist, also wenn gilt

$$\mathcal{G}(v) = [f'(v)]^2 + [g'(v)]^2 = 1. \quad (3.138)$$

In diesem Fall erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= f^2, & \mathcal{F} &= 0, & \mathcal{G} &= 1, & \mathcal{W} &= \det G_X = f, \\ \mathcal{L} &= -fg', & \mathcal{M} &= 0, & \mathcal{N} &= f''g' - f'g''. \end{aligned} \quad (3.139)$$

Dann ergibt sich

$$H_f(v) = \frac{-g'(v) + f(v)[f''(v)g'(v) - f'(v)g''(v)]}{2f(v)} \quad (3.140)$$

für die Mittlere Krümmung (vgl. (3.137)) und

$$\begin{aligned} K_f(v) &= -g'(v) \frac{f''(v)g'(v) - f'(v)g''(v)}{f(v)} = -\frac{f''(v)[g'(v)]^2 - f'(v)g'(v)g''(v)}{f(v)} \\ &= -\frac{f''(v)[g'(v)]^2 + [f'(v)]^2 f''(v)}{f(v)} = -\frac{f''(v)}{f(v)} \end{aligned} \quad (3.141)$$

für die Gauß'sche Krümmung (vgl. (3.136)), denn wegen (3.141) gilt  $\mathcal{G}' = 2(f'f'' + g'g'') \equiv 0$  und daher  $g'g'' = -f'f''$ .

Für eine Rotationsfläche, die nach Bogenlänge parametrisiert ist (vgl. (3.138)), erhält man

$$\kappa_1(v) = -\frac{g'(v)}{f(v)}, \quad \kappa_2(v) = f''(v)g'(v) - f'(v)g''(v), \quad (3.142)$$

wobei  $\kappa_1, \kappa_2$  die Hauptkrümmungen sind (siehe Korollar 3.57).

Eine weitere Konsequenz für den Spezialfall  $\mathcal{F} = 0 = \mathcal{M}$  ist: Die Koordinatenkurven einer Rotationsfläche, d.h.

$$\begin{aligned} u \mapsto X(u, v), \quad v \text{ fest} & \quad (\text{Breitenkreise}), \\ v \mapsto X(u, v), \quad u \text{ fest} & \quad (\text{Meridiane}) \end{aligned} \quad (3.143)$$

sind Krümmungslinien, da sich (3.129) in diesem Fall vereinfacht zu

$$\det \begin{bmatrix} * & 0 & * \\ * & 0 & * \\ * & 0 & * \end{bmatrix} \equiv 0 \quad (3.144)$$

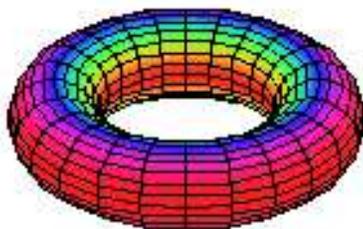
( $v' = 0$  für Breitenkreise und  $u' = 0$  für Meridiane).

**Beispiel 3.67** Der Torus  $Y(u, v) = ((R + r \sin v) \cos u, (R + r \sin v) \sin u, r \cos v)^\top$  von Beispiel 3.39 (vgl. Fig. 1.20) ist eine Rotationsfläche. Wir haben die Matrizen der beiden Fundamentalformen in (3.61) und (3.62) berechnet. Für die Gauß'sche Krümmung erhalten wir die folgenden Werte

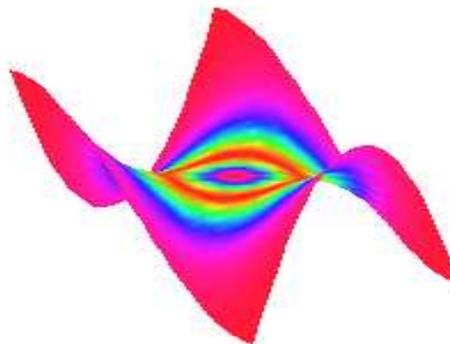
$$K_Y = \det [B_X G_X^{-1}] = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} = \frac{\sin v}{r(R + r \sin v)} = \begin{cases} > 0 & v \in (0, \pi), \\ = 0 & v = 0, \pi, \\ < 0 & v \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Also,  $K_Y > 0$  auf der Außenseite,  $K_Y < 0$  auf der Innenseite,  $K_Y = 0$  auf der Ober- und Unterkreis (siehe Fig. 3.13 für graphische Darstellung).

Flächen, die bzgl ihrer Gauß'schen Krümmung eingefärbt sind



Torus  
Fig. 3.13



Affensattel  
Fig. 3.14

Fig. 3.14 veranschaulicht die Gauß'sche Krümmung des Affensattels  $X(u, v) = (u, v, u^3 - 3v^2u)$ .

### 3.9 REGELFLÄCHEN

Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Raumkurve. Es sei weiterhin eine glatte Abbildung  $w : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  und ein offenes Intervall  $J \subset \mathbb{R}$  gegeben. Definiere  $X : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch

$$X(t, u) := \alpha(t) + uw(t). \quad (3.145)$$

**Definition 3.68** Eine reguläre Fläche  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ , die durch eine Parametrisierung der Form (3.145) darstellbar ist, heißt **Regelfläche** (Englisch: "ruled surface").

Die von  $u \cdot w$  erzeugten Geraden heißen **Regelgeraden**, und die Kurve  $\alpha$  nennt man **Leitkurve**.

**Beispiel 3.69** Es sei  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine reguläre Kurve,  $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$  und  $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$ . Flächen

$$X^\pm(t, u) := \alpha(t) + u\alpha'(t), \quad X^\pm : I \times \mathbb{R}^\pm \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

heißen **Tangentenflächen** von  $\alpha$ . Ist nun die Krümmung von die Kurve  $\alpha$  nicht entartet  $\kappa_\alpha(t) = |\alpha'(t) \times \alpha''(t)|/|\alpha'(t)|^3 \neq 0$  für alle  $t \in I$  (vgl. Formel (2.20)), so folgt mit

$$X_t^\pm = \alpha'(t) + u\alpha''(t), \quad X_u^\pm = \alpha'(t), \quad (3.146)$$

dass die Fläche  $X^\pm$  regulär ist:

$$X_t^\pm \times X_u^\pm = u\alpha''(t) \times \alpha'(t) \neq 0. \quad (3.147)$$

Dann sind die Tangentenflächen Regelflächen mit  $\alpha'$  als Leitkurve und Spur  $\alpha$  als gemeinsamem Rand.

**Beispiel 3.70** Es sei  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0)^\top$ , eine ebene Kurve ohne Selbstüberschneidungen und  $w(t) := (0, 0, 1)^\top$ . Die zugehörige Regelfläche für  $J = \mathbb{R}$

$$X(t, u) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), u)^\top = \alpha + uw, \quad X : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

nennt man einen **verallgemeinerten Zylinder** über  $\alpha$ .

**Beispiel 3.71** Es sei  $\alpha$  eine ebene Kurve wie in Beispiel 3.70. Zu einem festen Punkt  $p \in \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$  sei  $w(t) := p - \alpha(t)$ . Dann ist

$$X : I \times (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad X(t, u) := (1 - u)\alpha(t) + up$$

der **verallgemeinerte Kegel** über  $\alpha$  mit Spitze  $p$ .

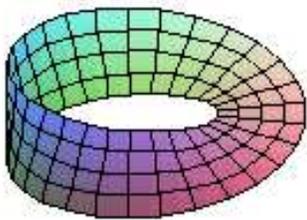
**Beispiel 3.72** Die Kurven

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)^\top \quad \text{und} \quad w(t) = \left( \cos t \cos \frac{t}{2}, \sin t \cos \frac{t}{2}, \sin \frac{t}{2} \right)^\top$$

liefern eine spezielle **Regelfläche**, das **Möbiusband** (vgl. Fig. 3.15):

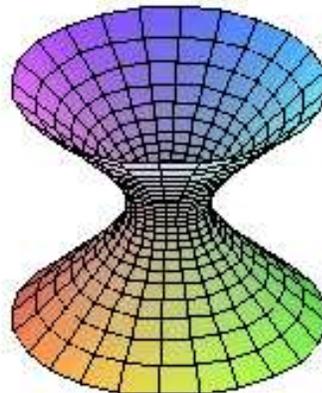
$$X : \mathbb{R} \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\begin{aligned} X(t, u) &= \left( \cos t + u \cos t \cos \frac{t}{2}, \sin t + u \sin t \cos \frac{t}{2}, u \sin \frac{t}{2} \right)^\top \\ &= \alpha(t) + u w(t) \end{aligned} \quad (3.148)$$



Möbiusband

Fig. 3.15



Einschaliges Hyperboloid

Fig. 3.16

**Beispiel 3.73** Auch das **Rotationshyperboloid** (oder **einschaliges Hyperboloid**)

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : 1 + z^2 = x^2 + y^2\}$$

(vgl. Fig. 3.16) ist eine Regelfläche. Ihre Parametrisierung lautet:

$$X(t, u) = (\cos t - u \sin t, \sin t + u \cos t, u), \quad t \in [0, 2\pi), \quad u \in \mathbb{R}. \quad (3.149)$$

In der Tat: mit der Wahl

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)^\top \quad \text{und} \quad w(t) = \alpha'(t) + e_3 = (-\sin t, \cos t, 1)^\top,$$

erhalten wir  $X(t, u) = \alpha(t) + u w(t)$ .

**Beispiel 3.74** Das **hyperbolische Paraboloid**

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : z = xy\} \quad (3.150)$$

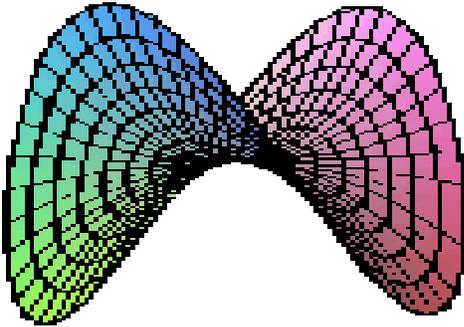
(vgl. Fig. 3.17) ist ebenfalls eine Regelfläche: wähle

$$\alpha(t) = (t, 0, 0), \quad w(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(0, 1, t)^\top;$$

dann ist die parametrisierte Fläche

$$\begin{aligned} X(t, u) &= \alpha(t) + u w(t) & (3.151) \\ &= \left( t, \frac{u}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{ut}{\sqrt{1+t^2}} \right)^\top \end{aligned}$$

ein hyperbolisches Paraboloid (3.150).



Hyperbolisches Paraboloid

Fig. 3.17

**Bemerkung 3.75** Für die Gauß'sche Krümmung  $K_X$  einer Regelfläche  $\mathcal{S} = \text{Spur } X$  gilt:

$$K_X \leq 0. \quad (3.152)$$

In der Tat: Da  $X_{uu} = 0$ , gilt  $\mathcal{L} = N \cdot X_{uu} = 0$  und die Gauß'sche Krümmung ist

$$K_X = \frac{\mathcal{L} \mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{\mathcal{E} \mathcal{G} - \mathcal{F}^2} = -\frac{\mathcal{M}^2}{\mathcal{E} \mathcal{G} - \mathcal{F}^2} \leq 0,$$

denn  $\mathcal{E} \mathcal{G} - \mathcal{F}^2 = \det G_X \geq 0$  (vgl. (3.10)).

## 3.10 MINIMALFLÄCHEN

**Definition 3.76** Eine reguläre parametrisierte Fläche  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt **Minimalfläche**, falls ihre mittlere Krümmung überall verschwindet

$$H_X(u, v) \equiv 0 \quad \text{auf } \Omega. \quad (3.153)$$

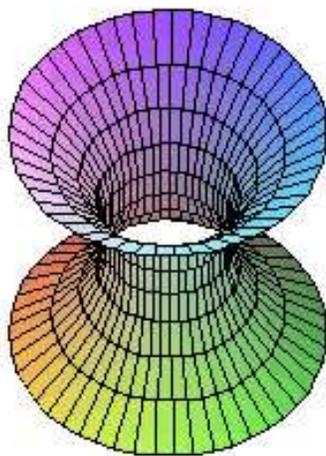
Zuerst betrachten wir zwei **klassische Beispiele für Minimalflächen**.

**Beispiel 3.77** Das **Katenoid** oder **Kettenfläche**:

$$X(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v)^\top, \quad \cosh v := \frac{e^v + e^{-v}}{2} \quad (3.154)$$

(vgl. Fig. 3.18) ist eine Rotationsfläche mit  $f(v) = \cosh v$ ,  $g(v) = v$ . Nach dem Formeln (3.134)-(3.137) erhalten wir

$$\mathcal{E} = \mathcal{G} = \cosh^2 v, \quad \mathcal{F} = \mathcal{M} = 0, \quad \mathcal{L} = -1, \quad \mathcal{N} = 1 \quad (3.155)$$



Katenoid  
Fig. 3.18



Helikoid  
Fig. 3.19

und aus

$$\kappa_1(v) = \frac{\mathcal{L}(v)}{\mathcal{E}(v)} = -\cosh^{-2} v, \quad \kappa_2(v) = \frac{\mathcal{N}(v)}{\mathcal{G}(v)} = \cosh^{-2} v \quad (3.156)$$

(vgl. (3.119)) ergibt sich

$$H_X(u, v) = 0, \quad K_X(u, v) = -\cosh^{-4} v. \quad (3.157)$$

Das Katenoid ist also eine Minimalfläche.

Die Differentialgleichung für die **Asymptotenlinien** lautet

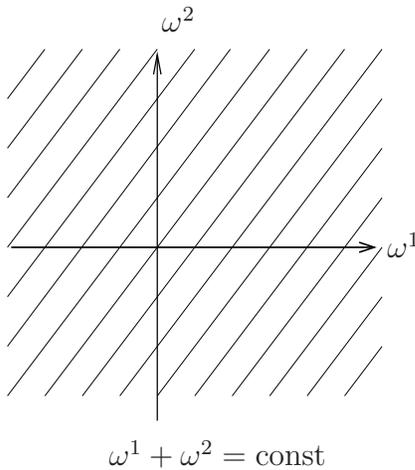
$$[(\omega^1)']^2 = [(\omega^2)']^2, \quad (3.158)$$

(vgl. (3.123)), d.h.

$$(\omega^1 + \omega^2)' = 0 \quad \text{oder} \quad (\omega^1 - \omega^2)' = 0. \quad (3.159)$$

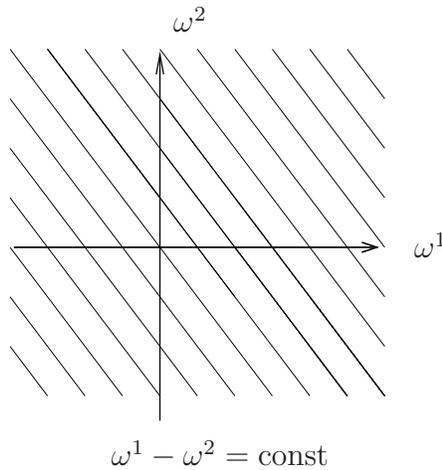
Demnach sind die Asymptotenlinien eines Katenoides gegeben durch

$$\omega^1 + \omega^2 = \text{const} \quad \text{oder} \quad \omega^1 - \omega^2 = \text{const}. \quad (3.160)$$



$$\omega^1 + \omega^2 = \text{const}$$

Fig. 3.20



$$\omega^1 - \omega^2 = \text{const}$$

Fig. 3.21

**Beispiel 3.78** Das **Helikoid (Schraubenfläche oder auch Wendelfläche)** ist gegeben durch

$$X(u, v) = (\sinh v \cos u, \sinh v \sin u, cu)^\top, \quad c \neq 0, \quad (3.161)$$

$$u \in [0, 2\pi), \quad v \in \mathbb{R},$$

(vgl. Beispiel 3.27, Beispiel 1.14, Übung 3.3 und Fig. 3.19).

Wir ergänzen die Formeln (3.35) mit folgenden:

$$\mathcal{W}^2 = \det G = v^2 + c^2, \quad \mathcal{L} = 0, \quad \mathcal{M} = \frac{c}{\sqrt{c^2 + v^2}}, \quad \mathcal{N} = 0. \quad (3.162)$$

Es folgt

$$G_X = \begin{bmatrix} c^2 + v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_X = \begin{bmatrix} 0 & c(c^2 + v^2)^{-1/2} \\ c(c^2 + v^2)^{-1/2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.163)$$

$$S_X = B_X G_X^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & c(c^2 + v^2)^{-3/2} \\ c(c^2 + v^2)^{-3/2} & 0 \end{bmatrix}$$

und damit

$$H_X(u, v) = 0, \quad K_X(u, v) = -\frac{c^2}{(c^2 + v^2)^2}. \quad (3.164)$$

Damit ist auch das Helikoid eine Minimalfläche.

Die Differentialgleichung für die **Asymptotenlinien** lautet

$$(\omega^1)'(\omega^2)' \equiv 0, \quad (3.165)$$

(vgl. (3.124)), d.h. die Asymptotenlinien des Helikoides sind die Kurven

$$\omega^1 = \text{const} \quad \text{oder} \quad \omega^2 = \text{const}. \quad (3.166)$$

Für die **Krümmungslinien** erhalten wir die Differentialgleichung

$$\mathcal{E} \mathcal{M}[(\omega^1)']^2 - \mathcal{G} \mathcal{M}[(\omega^2)']^2 \equiv 0 \quad \iff \quad [c^2 + (\omega^2)^2][(\omega^1)']^2 = [(\omega^2)']^2 \quad (3.167)$$

(vgl. (3.128) und (3.162) mit  $u = \omega^1, v = \omega^2$ ). Diese können wir folgendermaßen umformen

$$\begin{aligned} (\omega^1)' &= \pm \frac{(\omega^2)'}{\sqrt{c^2 + (\omega^2)^2}} = \pm (\omega^2)' \frac{1 + \frac{\omega^2}{\sqrt{c^2 + (\omega^2)^2}}}{\omega^2 + \sqrt{c^2 + (\omega^2)^2}} \\ &= \pm \frac{d}{dt} \left[ \log \left( \omega^2 + \sqrt{c^2 + (\omega^2)^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Die Lösung lautet

$$\log \left( \omega^2 + \sqrt{c^2 + (\omega^2)^2} \right) \pm \omega^1 = \text{const}.$$

Also sind die Kurven  $\log \left( v + \sqrt{c^2 + v^2} \right) \pm u = \text{const}$  die Krümmungslinien des Helikoides.

Jetzt erklären wir, warum das Wort “minimal” für solchen Flächen gerecht ist. Dafür müssen wir die **Variationsmethode** für des Flächeninhalts einsetzen.

Betrachte  $U \subset \Omega$  mit  $U$  offen,  $\bar{U}$  kompakt,  $\bar{U} \in \Omega$ . Betrachte weiterhin eine glatte Funktion  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h \in \mathcal{C}^2(\bar{U})$ . Zu  $\varepsilon > 0$  sei

$$\Phi : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi(u, v, t) := X(u, v) + th(u, v)N(u, v). \quad (3.168)$$

Man nennt  $\Phi$  eine **normale Variation von  $X(\bar{U})$** . Ist dann

$$X^t(u, v) := \Phi(u, v, t), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon), \quad (3.169)$$

eine parametrisierte Flächenfamilie auf  $U$  und sei mit  $A(t) = A(X^t)$  der variierte Flächeninhalt von  $\text{Spur } X^t$  bezeichnet.

**Lemma 3.79** *Eine Minimalfläche minimiert lokal ihren Flächeninhalt: Eine reguläre parametrisierte Fläche  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist genau dann eine Minimalfläche, wenn  $A'(0) = 0$  für alle kompakten Mengen  $U \Subset \Omega$  und alle normalen Variationen  $h \in \mathbb{C}^2(\bar{U})$  von  $X(U)$ .*

**Beweis.** Mit (3.169)

$$X_u^t = X_u + thN_u + th_uN, \quad X_v^t = X_v + thN_v + th_vN,$$

so dass

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^t &= X_u^t \cdot X_u^t = \mathcal{E} + 2thX_u \cdot N_u + t^2 [h^2|N_u|^2 + h_u^2], \\ \mathcal{F}^t &= X_u^t \cdot X_v^t = \mathcal{F} + th[X_u \cdot N_v + X_v \cdot N_u] + t^2 [h^2N_u \cdot N_v + h_uh_v], \\ \mathcal{G}^t &= X_v^t \cdot X_v^t = \mathcal{G} + 2thX_v \cdot N_v + t^2 [h^2|N_v|^2 + h_v^2], \end{aligned} \quad (3.170)$$

denn

$$N \cdot N_u = 0, \quad N \cdot N_v = 0, \quad N \cdot X_u = 0, \quad N \cdot X_v = 0. \quad (3.171)$$

Mit

$$X_u \cdot N_u = -\mathcal{L}, \quad X_u \cdot N_v = X_v \cdot N_u = -\mathcal{M}, \quad X_v \cdot N_v = -\mathcal{N}$$

folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^t\mathcal{G}^t - [\mathcal{F}^t]^2 &= \mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2 - 2th(\mathcal{E}\mathcal{N} - 2\mathcal{F}\mathcal{M} + \mathcal{G}\mathcal{L}) + t\mathcal{R}(u, v, t) \\ &= (\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2)(1 - 4thH_X) + t\mathcal{R}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{R}(u, v, t) = 0, \end{aligned} \quad (3.172)$$

wobei wir für die mittlere Krümmung von  $H_X$  Gleichung (3.117) angewandt haben.

Ist also  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein (abhängig von  $h$  und  $H_X$ ), so ist  $X^t$  eine reguläre Fläche, denn es gilt  $\mathcal{E}^t\mathcal{G}^t - [\mathcal{F}^t]^2 \neq 0$  auf  $\bar{U}$ . Nach (3.70) erhalten wir für den Flächeninhalt:

$$\begin{aligned} A(t) = A(X^t) &= \int_U \sqrt{\mathcal{E}^t\mathcal{G}^t - [\mathcal{F}^t]^2} \, du \, dv \\ &= \int_U \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} \sqrt{1 - 4thH_X + t\mathcal{R}_0} \, du \, dv. \end{aligned} \quad (3.173)$$

Hierbei ist  $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}/(\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2)$ . Damit ist  $(-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \rightarrow A(t)$  differenzierbar für kleine Werte von  $0 < \varepsilon \ll 1$  mit

$$A'(0) = -2 \int_U h(u, v) H_X(u, v) \sqrt{\mathcal{E}(u, v)\mathcal{G}(u, v) - \mathcal{F}^2(u, v)} \, du \, dv. \quad (3.174)$$

Vorausgesetzt  $H_X(u, v) \equiv 0$ , so folgt aus (3.174) unmittelbar  $A'(0) = 0$ .

Um die Implikation  $A'(0) = 0 \implies H_X(u, v) \equiv 0$  zu beweisen, nehmen wir an  $H_X(p_0) \neq 0$  für  $p_0 = (u_0, v_0)^\top \in \Omega$ . Dann  $H_X \neq 0$  für  $|p - p_0| \leq r$  und kleine Wert von  $r > 0$ . Weiterhin wird gewählt  $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$  mit den Eigenschaften  $\eta(x) \geq 0$ ,  $\eta(x) = 1$  auf  $|x| \leq r/2$ ,  $\eta \geq 0$  auf  $|x| \geq r$  und wird eine Abbildung  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  definiert:

$$h(u, v) := \eta(|(u - u_0, v - v_0)|)H_X(u, v).$$

Aus (3.174) folgt dann

$$\begin{aligned} A'(0) &= -2 \int_{|\eta| \leq r} \eta H_X^2(u, v) \sqrt{\mathcal{E}(u, v)\mathcal{G}(u, v) - \mathcal{F}^2(u, v)} \, du \, dv \\ &\leq -2 \int_{|\eta| \leq r/2} H_X^2(u, v) \sqrt{\mathcal{E}(u, v)\mathcal{G}(u, v) - \mathcal{F}^2(u, v)} \, du \, dv < 0, \end{aligned} \quad (3.175)$$

also – wie gewünscht – ein Widerspruch! ■

**Bemerkung 3.80** Ist  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Minimalfläche, dann gilt folgende:

- Wenn  $X$  ein kritischer Punkt des Flächenfunktional ist, also  $A'(0) = 0$ , dann muss in  $X$  nicht notwendigerweise ein Minimum des Flächenfunktional vorliegen.
- Aber wenn  $X$  eine Minimalfläche ist, dann minimiert  $X$  lokal den Flächeninhalt (teilweise bewiesen in Lemma 3.79).
- Das Wort “Minimalfläche” ist historisch begründet und wurde von Lagrange eingeführt.

**Das PLATEAU-PROBLEM:** Gibt es zu jeder geschlossenen Kurve  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  eine Fläche  $M \subset \mathbb{R}^3$  mit minimalem Flächeninhalt und Randwerten  $\Gamma$ ?

Welche Kurven, welche Flächen sind zugelassen und was bedeutet  $\gamma$  ist der Rand von  $M$ ? – das sind die nichttrivialen Aspekte des Problems.

Plateau war ein belgischer Physiker, der mit Seifenhaut experimentierte und das Problem um 1850 formuliert hat.

Eine Variante dieses Problems ist von Douglas und Radó um 1930 gelöst und mit der 1. Fields-Medaille ausgezeichnet worden.

**Die Minimalflächengleichung (MFG)** (3.133): Ist eine Minimalfläche als Graph einer reellen Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben, d.h.  $X = X_f(u, v) = (u, v, f(u, v))^\top$ , so erhalten wir aus (3.132) für die mittlere Krümmung eine Differentialgleichung, die sogenannte **Minimalflächengleichung für Graphenflächen** (3.133). Diese Gleichung stellt eine *quasilineare elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung* dar, die aber *nichtlinear* ist!

## 3.11 MINIMALFLÄCHEN UND ISOTHERME PARAMETRISIERUNG

**Definition 3.81** Eine reguläre Fläche  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt **isotherm parametrisiert** (oder einfach **isotherm**), falls gilt

$$|X_u|^2 - |X_v|^2 \equiv 0 \equiv X_u \cdot X_v, \quad (3.176)$$

d.h. falls  $\mathcal{E} = \mathcal{G}$  und  $\mathcal{F} = 0$ . Damit ist die erste Fundamentalform in jedem Punkt  $(u, v)$  ein Vielfaches der Identität:

$$G(u, v) = \mathcal{E}(u, v) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Man nennt  $(u, v)$  in diesem Fall **isotherme Parameter**.

Für eine reguläre Fläche und ihre Gauß-Abbildung

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad N = N_X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad (3.177)$$

betrachten wir die Funktion

$$\mathbf{H}_X := H_X N_X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (3.178)$$

wobei  $H_X = H_X(u, v)$  die mittlere Krümmung von  $\text{Spur } X$  bezeichnet (vgl. (3.117)). Selbstverständlich steht das Vektor  $\mathbf{H}_X(u, v)$  perpendicular zu den Tangentraum  $\mathbf{H}_X(u, v) \perp T_{(u,v)}X$ .

Für die normale Variation mit  $h = H$  aus (3.174), wobei  $\Phi = X + t\mathbf{H}$ , folgt

$$A'(0) = -2 \int_U |\mathbf{H}|^2 \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} du dv \leq 0. \quad (3.179)$$

Ist also  $X$  keine Minimalfläche  $H(u, v) \neq 0$ , so vergrößert eine Deformation in Richtung  $\mathbf{H}$  (e.g. in Richtung Normalvektor  $N_X$ ) den Flächeninhalt.

**Satz 3.82** Es sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine reguläre, isotherme Fläche. Dann ist

$$\Delta X := X_{uu} + X_{vv} = 2\lambda^2 \mathbf{H} = 2H(X_u \times X_v), \quad (3.180)$$

wobei

$$\lambda^2 = |X_u \times X_v| = \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} = \mathcal{E} = \mathcal{G}. \quad (3.181)$$

**Beweis:** Nach Definition 3.81,

$$X \text{ isotherm} \iff \mathcal{E} = X_u \cdot X_u = X_v \cdot X_v = \mathcal{G}, \quad \mathcal{F} = X_u \cdot X_v = 0.$$

Mit Differentiation folgt:

$$X_{uu} \cdot X_u = X_{uv} \cdot X_v \quad (3.182)$$

$$X_{uv} \cdot X_u = X_{vv} \cdot X_v \quad (3.183)$$

$$X_{uu} \cdot X_v + X_{uv} \cdot X_u = 0 \quad (3.184)$$

$$X_{uv} \cdot X_v + X_{vv} \cdot X_u = 0. \quad (3.185)$$

Also folgt aus (3.182), (3.185)

$$X_{uu} \cdot X_u = X_{uv} \cdot X_v = -X_{vv} \cdot X_u \quad (3.186)$$

und aus (3.184), (3.183) folgt

$$X_{uu} \cdot X_v = -X_{uv} \cdot X_u = -X_{vv} \cdot X_v. \quad (3.187)$$

Aus (3.186) und (3.187) bekommen wir weiter

$$\Delta X \cdot X_u \equiv \Delta X \cdot X_v \equiv 0,$$

d.h.  $\Delta X$  ist parallel zur Gauß Abbildung

$$\Delta X = \tilde{\lambda} N_X \implies \Delta X \cdot N_X = \tilde{\lambda} N_X \cdot N_X = \tilde{\lambda}. \quad (3.188)$$

Andererseits, da  $X$  isotherm ist, folgt aus (3.119) und Definition 3.81

$$H = \frac{\mathcal{E}\mathcal{N} - 2\mathcal{F}\mathcal{M} + \mathcal{G}\mathcal{L}}{2(\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2)} = \frac{\mathcal{N} + \mathcal{L}}{2\mathcal{E}}$$

bzw. (vgl. (3.181) und (3.188))

$$2\lambda^2 H = 2\mathcal{E}H = \mathcal{N} + \mathcal{L} = N_X \cdot X_{uu} + N_X \cdot X_{vv} = N_X \cdot \Delta X = \tilde{\lambda}.$$

Und wir erhalten die gewünschte Gleichung (3.180):

$$\Delta X = 2\lambda^2 H N_X = 2\lambda^2 \mathbf{H}. \quad \blacksquare$$

**Korollar 3.83** *Es sei  $X(u, v) = (X^1(u, v), X^2(u, v), X^3(u, v))^T$  eine reguläre isotherme Fläche. Dann gilt:  $X$  ist eine Minimalfläche genau dann, wenn alle Funktionen  $X^1, X^2, X^3$  harmonisch sind:*

$$\Delta X^k(u, v) \equiv 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.189)$$

## 3.12 MINIMALFLÄCHEN UND FUNKTIONENTHEORIE

Identifiziere

$$\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C} \quad \text{mittels} \quad (u, v) \leftrightarrow u + iv.$$

Für eine reguläre Fläche  $X = (X^1, X^2, X^3)^\top : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei

$$\begin{aligned} & (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^\top = 2X_\zeta, \\ \text{wobei} \quad & \varphi_k(\zeta) = X_u^k - iX_v^k = 2X_\zeta^k, \quad \varphi_k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad k = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3.190)$$

die **assozierten Funktion** der komplexen Variable  $\zeta = u + iv$ , definiert mittels der komplexen Ableitung

$$\partial_\zeta \psi = \psi_\zeta := \frac{1}{2}(\omega_u^1 - i\omega_v^2), \quad \text{wobei} \quad \psi = \omega^1 + i\omega^2.$$

**Lemma 3.84** *i.  $X$  ist genau dann isotherm, wenn  $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \equiv 0$ .*

*ii. Ist  $X$  isotherm parametrisiert, so gilt:*

$$X \text{ ist Minimalfläche} \iff \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \text{ sind holomorph.}$$

**Beweis:** Aus (3.190) folgt

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = X_u^2 - X_v^2 - 2iX_u \cdot X_v = \mathcal{E} - \mathcal{G} - 2i\mathcal{F} = 0$$

(vgl. (3.176)), wobei  $X_u = (X_u^1, X_u^2, X_u^3)^\top$ ,  $X_v = (X_v^1, X_v^2, X_v^3)^\top$ , also folgt (i).

Nun ist  $\Delta X = (X_u)_u + (X_v)_v = 0$  äquivalent zu:

$$(X_u^k)_u = (-X_v^k)_v, \quad k = 1, 2, 3.$$

Damit ist der eine Teil der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen erfüllt. Der zweite ist aber automatisch erfüllt:

$$(X_u^k)_v = -(-X_v^k)_u, \quad k = 1, 2, 3.$$

Dann sind Funktion  $\varphi_1, \varphi_2$  und  $\varphi_3$  holomorph da die folgende Äquivalenz hält:

$$\psi(u, v) = \omega^1(u, v) + i\omega^2(u, v) \text{ ist holomorph} \iff \begin{cases} \omega_u^1 = \omega_v^2, \\ \omega_v^1 = -\omega_u^2 \end{cases}. \quad (3.191)$$

■

**Satz 3.85 (Minimalflächenquelle).** Sei

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \quad \Omega \subset \mathbb{C}, \quad (3.192)$$

holomorph und

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \equiv 0, \quad |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2 \neq 0. \quad (3.193)$$

Dann ist das Integral

$$X(\zeta) := \operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \varphi_3(\tau))^{\top} d\tau, \quad \zeta \in \Omega \quad (3.194)$$

wegunabhängig und definiert eine Minimalfläche  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

**Beweis:** Sei  $X(\zeta) = (X^1(\zeta), X^2(\zeta), X^3(\zeta))^{\top}$ ,  $\zeta = u + iv$ , definiert mittels (3.194). Dann sind die Integrale wegunabhängig da jede Integral auf geschlossene Kurve verschwindet  $\int_{\Gamma} \varphi_k(\tau) d\tau \equiv 0$  vorausgesetzt  $\varphi_k(\zeta)$  holomorph in inneren Gebiet von  $\Gamma$  ist (gemäß Cauchy Theorem). Weiterhin:

$$\begin{aligned} 2\partial_{\zeta} X^k(\zeta) &= (\partial_u - i\partial_v) X^k(u + iv) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_u - i\partial_v) \left[ \int_{\zeta_0}^{u+iv} \varphi_k(\tau) d\tau + \int_{\zeta_0}^{u-iv} \overline{\varphi_k(\tau)} d\tau \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \varphi_k(u + iv) + \overline{\varphi_k(u - iv)} \right] - \frac{i}{2} \left[ i\varphi_k(u + iv) - i\overline{\varphi_k(u - iv)} \right] \\ &= \varphi_k(u + iv), \quad k = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

und, gemäß Lemma 3.84, definiert die Abbildung  $X(\zeta)$  eine Minimalfläche. ■

**Lemma 3.86** Für jedes holomorphe Tripel  $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$  mit der Eigenschaft

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \equiv 0, \quad \varphi_j \neq 0 \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.195)$$

existiert eine holomorphe Funktion  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  und eine meromorphe Funktion  $G : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , mit denen  $FG^2$  ist holomorph und gilt:

$$\varphi_1 = \frac{F}{2}(1 - G^2), \quad \varphi_2 = \frac{iF}{2}(1 + G^2), \quad \varphi_3 = FG^2. \quad (3.196)$$

Umgekehrt gilt: für jedem Paar  $(F, G)$ , mit  $F$  holomorph,  $G$  meromorph und  $FG^2$  holomorph und zugeordneten Tripel holomorpher Funktionen  $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$  im (3.196) genügen (3.195).

**Beweis.** Für das gegebene Tripel holomorpher Funktionen  $\varphi_1, \varphi_2$  und  $\varphi_3$  mit den Eigenschaften (3.195), sind die Funktionen

$$F = \varphi_1 - i\varphi_2, \quad G = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2} \quad (3.197)$$

wohldefiniert,  $F$  ist holomorph und  $G$  ist meromorph, weil in den Fall  $\varphi_1 - i\varphi_2 = 0$  folgt  $\varphi_3^2 = -\varphi_1^2 - \varphi_2^2 = -(\varphi_1 - i\varphi_2)(\varphi_1 + i\varphi_2) = 0!$  Die Funktion

$$FG^2 = \frac{\varphi_3^2}{\varphi_1 - i\varphi_2} = -\frac{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}{\varphi_1 - i\varphi_2} = -\varphi_1 - i\varphi_2 \quad (3.198)$$

ist auch holomorph.

Sei umgekehrt eine holomorphe Funktion  $F$  und eine meromorphe Funktion  $G$  gegeben mit  $FG^2$  holomorph. Dann sind die Funktionen  $\varphi_1, \varphi_2$  und  $\varphi_3$  aus (3.196) holomorph und haben die Eigenschaften (3.195). ■

Für beliebige holomorphe  $F$  und holomorphe  $F, FG^2$ , sind die integralen

$$\begin{aligned} X^1(\zeta) &:= \operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{F(\zeta)}{2} [1 - G^2(\zeta)] d\zeta, \\ X^2(\zeta) &:= \operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} i \frac{F(\zeta)}{2} [1 - G^2(\zeta)] d\zeta, \\ X^3(\zeta) &:= \operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} F(\zeta) G^2(\zeta) d\zeta, \end{aligned} \quad (3.199)$$

holomorph und wegunabhängig (vgl. (3.194)).

**Korollar 3.87 (Weierstrass Darstellung).** Jede isotherm parametrisierte Minimalfläche  $X = (X^1, X^2, X^3)^{\top} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \Omega \subset \mathbb{R}^2$  *approx* $\mathbb{C}$  die nicht eben ist ( $\mathcal{E} \neq 0$ ), besitzt lokal die Darstellung (3.199), wobei die Funktion  $G$  meromorph und die Funktionen  $F, FG^2$  holomorph sind.

Umgekehrt bestimmt jedes Paar  $\{F, G\}$ , mit  $G$  meromorph,  $F$  und  $F(\zeta)G^2(\zeta)$  holomorph in  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , eine isotherm parametrisierte Minimalfläche  $X\Omega : \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

**Beispiel 3.88** Das Katenoid (Kettenfläche)

$$X(u + iv) = X(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)^{\top}$$

aus Beispiel 3.77 (mit vertauschten Parametern  $u \leftrightarrow v$ ) erkennen wir: die Fläche ist isotherm parametrisiert  $\mathcal{E} = \mathcal{G}, \mathcal{F} = 0$  (vgl. (3.176)) oder, äquivalent ausgedrückt,

$$\mathcal{E} - \mathcal{G} + i\mathcal{F} \equiv 0. \quad (3.200)$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\varphi_1(\zeta) &= X_u^1 - iX_v^1 = \sinh u \cos v + i \cosh u \sin v = \sinh \zeta, \\ \varphi_2(\zeta) &= X_u^2 - iX_v^2 = \sinh u \sin v - i \cosh u \cos v = -i \cosh \zeta, \\ \varphi_3(\zeta) &= X_u^3 - iX_v^3 \equiv 1, \quad \zeta := u + iv\end{aligned}\quad (3.201)$$

(vgl. Formeln (3.190)). Die Minimalflächendarstellung (3.192)-(3.194) des Katenoides wird durch diese Funktionen bestimmt. Für die Weierstrass Darstellung (3.199) erhalten wir:

$$F(\zeta) = \varphi_1(\zeta) - i\varphi_2(\zeta) = -e^{-\zeta}, \quad G(\zeta) = \frac{1}{\varphi_1(\zeta) - i\varphi_2(\zeta)} = -e^{\zeta}. \quad (3.202)$$

**Beispiel 3.89** Die Parametrisierung

$$X : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u)^\top \quad (3.203)$$

des Helikoid (Beispiel 3.78 mit  $c = 1$ ) ist nicht isotherm:  $\mathcal{E} - \mathcal{G} + i\mathcal{F} \neq 0$  (vgl. (3.200)). Aber wir werden nun **drei weitere Parametrisierungen** des Helikoids betrachten:

$$\tilde{X} : \mathbb{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \tilde{X}(u, v) = (u, v, u \tan v)^\top, \quad (3.204)$$

$$\tilde{\tilde{X}} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \tilde{\tilde{X}}(u, v) = (-\sinh u \sin v, \sinh u \cos v, -v)^\top, \quad (3.205)$$

$$X_0 : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad X_0(u, v) = (\sinh v \cos u, \sinh v \sin u, v)^\top. \quad (3.206)$$

Die Variabeltransformationen

$$\Phi : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \Phi(u, v) = \left(v, \frac{u}{\cos v}\right)^\top,$$

$$\tilde{\Phi} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \tilde{\Phi}(u, v) = (-v, \sinh u)^\top,$$

$$\Phi_0 : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \Phi_0(u, v) = (u, \sinh v)^\top,$$

$$T_{12}, T_{23} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T_{12}(x, y, z) = (y, x, z)^\top, \quad T_{23}(x, y, z) = (x, z, y)^\top$$

sind nicht entartet da die entsprechende Jacobi Determinanten verschwinden nicht:

$$D\Phi(u, v) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{\cos v} & \frac{u \sin v}{\cos^2 v} \end{bmatrix}, \quad \det D\Phi(u, v) = -\frac{1}{\cos v} < 0, \quad (3.207)$$

$$D\tilde{\Phi}(u, v) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \cosh u & 0 \end{bmatrix}, \quad \det D\tilde{\Phi}(u, v) = \cosh u \geq 1, \quad (3.208)$$

$$D\Phi_0(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cosh v \end{bmatrix}, \quad \det D\Phi_0(u, v) = \cosh v \geq 1, \quad (3.209)$$

$$DT_{12}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad DT_{23}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det DT_{12}(x, y, z) \equiv -1, \quad \det DT_{23}(x, y, z) \equiv -1.$$

Es folgt:

$$\tilde{X} = T_{23} \circ X \circ \Phi, \quad \tilde{X} = T_{12} \circ X \circ \tilde{\Phi}, \quad X_0 = T_{12} \circ X \circ \Phi_0. \quad (3.210)$$

Die Parametrisierung  $\tilde{X}$  in (3.205) ist isotherm da

$$\tilde{\mathcal{E}} = |\tilde{X}_u|^2 = 1 + \sinh^2 u = \cosh^2 u = \tilde{\mathcal{G}}, \quad \tilde{\mathcal{F}} = 0. \quad (3.211)$$

Bei Umparametrisierungen bleibt die Eigenschaft ‘‘Minimalfläche zu sein’’ erhalten  $H_X \equiv 0$ , da  $\Delta \tilde{X} \equiv 0$  (vgl. Korollar 3.83).

Die Minimalflächendarstellung (3.192)-(3.194) für isotherme Parametrisierung (3.205) erhält man mit folgenden holomorphen Funktionen

$$\varphi_1(\zeta) = i \sinh \zeta, \quad \varphi_2(\zeta) = \cosh \zeta, \quad \varphi_3(\zeta) \equiv i, \quad \zeta := u + iv \quad (3.212)$$

und die Weierstrass Darstellung (3.199) durch:

$$F(\zeta) = -ie^{-\zeta}, \quad G(\zeta) = -ie^{\zeta}. \quad (3.213)$$

Die Funktionen  $\varphi_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $F$  und  $G$  in (3.201), (3.202) und (3.212), (3.213) unterscheiden sich durch den Faktor  $i$ . In diesem Fall spricht man von **adjungierten Minimalflächen**. Also, *Katenoid und Helikoid sind adjungierte Minimalflächen*.

**Bemerkung 3.90** Die Parametrisierungen  $\tilde{X} = (\tilde{X}^1, \tilde{X}^2, \tilde{X}^3)^\top$  und  $\tilde{X} = (\tilde{X}^1, \tilde{X}^2, \tilde{X}^3)^\top$  können in  $u$  auf ganz  $\mathbb{R}^2$  periodisch fortgesetzt werden, denn die ersten zwei Komponenten  $\tilde{X}^1$ ,  $\tilde{X}^2$ ,  $\tilde{X}^1$  und  $\tilde{X}^2$  sind periodisch in  $u$ .

Dasselbe ist für die Parametrisierung (3.204)  $\tilde{X} = (\tilde{X}^1, \tilde{X}^2, \tilde{X}^3)^\top$  nicht möglich, da  $\tilde{X}$  ein Graph ist und  $\tilde{X}^3 = u \tan v$  keine passende Fortsetzung in  $\tilde{X}^2 = v$  hat! Die Problem liegt daran daß die Variabeltransformation  $\Phi(u, v)$  entartet  $D\Phi(u, v) = -\frac{1}{\cos v} = \infty$  beim  $v = \frac{\pi}{2}$  (vgl. (3.207)).

## 3.13 KLASSISCHE BEISPIELE VON MINIMALFLÄCHEN

Gesucht: Explizite Lösungen der Minimalflächengleichung für Graphenflächen (MFG) (3.133):

$$f_{uu}(1 + f_v^2) - 2f_{uv}f_u f_v + f_{vv}(1 + f_u^2) = 0.$$

**Triviale Lösungen:** I. Alle (affin) linearen Funktionen  $f$  sind Lösungen.

II. Ist  $f$  ein Lösung, so sind die Funktionen

$$\begin{cases} f + \text{const}, \\ f_{u_0, v_0}(u, v) := f(u - u_0, v - v_0) & \text{(Translationen),} \\ f^\lambda(u, v) := \frac{1}{\lambda} f(\lambda u, \lambda v) \quad \text{für } \lambda \neq 0 & \text{(Streckungen)} \end{cases} \quad (3.214)$$

ebenfalls Lösungen.

**Historisch:** Lagrange war der Erste der Minimalflächen im Jahr 1760 untersucht hat.

Meusnier hat im Jahr 1776: erste nichtlineare Lösungen gefunden: Katenoid, Helikoid.

Scherk hat im Jahr 1834 weitere Lösungen gefunden-Scherk'sche Flächen.

**IDEE:** finde spezielle Lösungen durch einen Separationsansatz.

**1. Ansatz:**

$f(u, v) = \varphi(u) + \psi(v)$ , also  $f_{uv} = 0$ . (MFG) (3.133) lautet

$$\varphi''(u)(1 + (\psi'(v))^2) = -\psi''(v)(1 + (\varphi'(u))^2)$$

und wird durch Umformen zu

$$\frac{-\varphi''(u)}{(1 + (\varphi'(u))^2)} \equiv \frac{\psi''(v)}{(1 + (\psi'(v))^2)} \equiv a = \text{const}, \quad (3.215)$$

denn die Funktionen sind unabhängig voneinander. Also haben wir eine gewöhnliche Differentialgleichung für  $\varphi'$  (bzw.  $\psi'$ ) hergeleitet. Deren Lösung lautet:

$$\begin{aligned} \frac{(\varphi')'(u)}{(1 + (\varphi'(u))^2)} &\equiv -a \quad \Rightarrow \quad \varphi'(u) = \tan [a(u - u_0)] \\ \Rightarrow \quad \varphi(u) &= -\frac{1}{a} \log [\cos(a(u - u_0))] + \text{const} \end{aligned} \quad (3.216)$$

und, ähnlich,

$$\frac{(\psi')'(v)}{(1 + (\psi'(v))^2)} \equiv a \quad \Rightarrow \quad \psi(v) = \frac{1}{a} \log [\cos(a(v - v_0))] + \text{const}. \quad (3.217)$$

Mit (3.215) folgt

$$f(u, v) = \frac{1}{a} \log \left[ \frac{\cos(a(v - v_0))}{\cos(a(u - u_0))} \right]. \quad (3.218)$$

Im Fall  $u_0 = v_0 = 0$  und  $a = 1$  die Lösung lautet

$$f(u, v) = \log \left[ \frac{\cos v}{\cos u} \right],$$

ist definiert auf den Mengen

$$\left\{ (u, v) : |u - k\pi| < \frac{\pi}{2}, \quad |v - \ell\pi| < \frac{\pi}{2}, \quad k + \ell \text{ gerade} \right\}$$

und heißt **Scherk'sche Fläche**:

$$X(u, v) = \left( u, v, \log \left[ \frac{\cos v}{\cos u} \right] \right)^\top, \quad -\frac{\pi}{2} \leq u, v < \frac{\pi}{2}. \quad (3.219)$$

$X(u, v)$  ist eine Minimalfläche und ihre mittlere Krümmung verschwindet identisch.

Die Parametrisierung (3.219) ist nicht isotherm  $\mathcal{F} = f_u f_v \neq 0$  (vgl. (3.176) und (3.200)). Aber die folgende Uparametrisierung der Scherk'schen Fläche ist isotherm:

$$X(u + iv) = X(\zeta) = \left( \arg \frac{\zeta + i}{\zeta - i}, \arg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}, \log \left| \frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2 - 1} \right| \right)^\top \quad (3.220)$$

$$= \left( \tan^{-1} \frac{2u}{u^2 + v^2 - 1}, \tan^{-1} \frac{-2v}{u^2 + v^2 - 1}, \frac{1}{2} \log \frac{(u^2 - v^2 + 1)^2 + 4u^2 v^2}{(u^2 - v^2 - 1)^2 + 4u^2 v^2} \right)^\top \quad (3.221)$$

Mit der Parametrisierung (3.220) ist es möglich weitere Darstellungen der Scherk'schen Fläche zu bestimmen: die Minimalflächendarstellung (3.192)-(3.194) wird durch die Funktionen

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{2}{1 + \zeta^2}, \quad \varphi_2(\zeta) = \frac{2i}{1 - \zeta^2}, \quad (3.222)$$

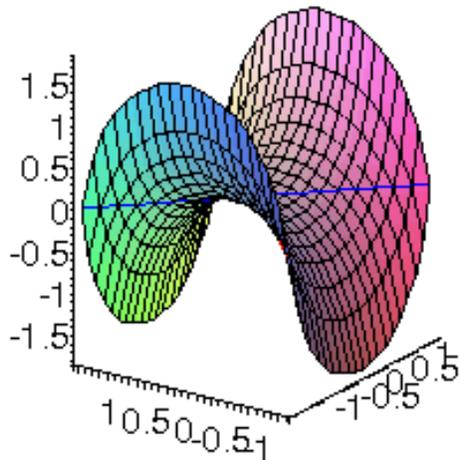
$$\varphi_3(\zeta) = \frac{4\zeta}{1 - \zeta^4}, \quad \zeta := u + iv$$

und die Weierstrass Darstellung (3.199) durch die Funktionen

$$F(\zeta) = \frac{4}{1 - \zeta^4}, \quad G(\zeta) = \zeta, \quad (3.223)$$

$$\zeta := u + iv$$

bestimmt.



Scherk'sche Fläche

Fig. 3.22

**Bemerkung 3.91** Die Darstellung (3.221) lässt sich durch Hinzufügen der vertikalen Geraden  $\left((2k+1)\frac{\pi}{2}, (2\ell+1)\frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R}$  zu einer glatten Fläche in  $\mathbb{R}^3$  ergänzen.

**2. Ansatz:**  $f_{uu} = 0$ , d.h.  $f(u, v) = au\varphi(v) + \psi(v)$ . Also ist  $f$  eine lineare Funktion von  $v$  und die (MFG) (3.133) ist äquivalent zu

$$[1 + a^2\varphi^2(v)][a\varphi''(v) + \psi''(v)] = 2a\varphi'(v)a\varphi(v)[a\varphi'(v) + \psi'(v)].$$

Die Gleichung ist affin linear in  $u$  und ein Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{cases} [1 + a^2\varphi^2(v)]a\varphi''(v) = 2a^3\varphi(v)(\varphi'(v))^2, \\ [1 + a^2\varphi^2(v)]\psi''(v) = 2a^2\varphi'(v)\varphi(v)\psi'(v), \end{cases} \quad (3.224)$$

Vorausgesetzt  $a \neq 0$  folgt

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{2a^2\varphi\varphi'}{1 + a^2\varphi^2} = \frac{\psi''}{\psi'} \quad (3.225)$$

und

$$\log \psi'(v) = \log \varphi'(v) + \text{const} \iff \psi'(v) = \text{const} \cdot \varphi'(v), \quad (3.226)$$

so wie

$$0 \equiv \frac{\varphi''}{1 + a^2\varphi^2} - \frac{(2a^2\varphi\varphi')\varphi'}{[1 + a^2\varphi^2]^2} = \left[ \frac{\varphi'}{1 + a^2\varphi^2} \right]'. \quad (3.227)$$

Aus (3.227)

$$\varphi'(v) = \text{const} \cdot [1 + a^2\varphi^2(v)]$$

und, mit  $\text{const} = \frac{b}{a}$  und (3.226),

$$\varphi(v) = \frac{1}{a} \tan [bv + c], \quad \psi(v) = d \tan [bv + c] + \tilde{d}. \quad (3.228)$$

Es folgt

$$f(u, v) = (u - u_0) \tan [b(v - v_0)] + \text{const},$$

so dass, mit  $u_0 = v_0 = 0$ ,  $b = 1$ ,  $\text{const} = 0$ ,

$$\text{graph } f = \{(u, v, u \tan v)^\top \in \mathbb{R}^3 : (u, v)^\top \in \mathbb{R}^2\} \quad (3.229)$$

bis auf Translationen und Streckungen der Argumente in  $\mathbb{R}^2$  (vgl. (3.214)). ■

Diese Fläche ist der Teil des von Meusnier 1776 gefundenen Helikoids (d.h., Wendelfläche mit Ganghöhe  $\pi$ ; vgl. die Darstellung (3.204)).

Das Helikoid ist gleichzeitig eine Regelfläche:  $X(t, u) = \alpha(t) + uw(t)$  mit der Leitkurve  $\alpha(t) = (0, t, 0)^\top$  und der Regelgerade  $w(t) = (1, 0, \tan t)^\top$ .

**Korollar 3.92** *Das Helikoid ist die einzige nichttriviale Regelfläche, die auch eine Minimalfläche ist.*

**Minimalflächen, die gleichzeitig Rotationsflächen sind.**

Gesucht ist eine Funktion  $f = f(z)$ , so dass die Rotation von

$$\text{Graph } f = \{(z, f(z))^\top \in \mathbb{R}^2 : z \in \mathcal{J} \subset \mathbb{R}\}$$

um die  $z$ -Achse

$$X(\theta, z) = (f(z) \cos \theta, f(z) \sin \theta, z)$$

lokal eine Minimalfläche erzeugt. Da  $g(v) = v$ ,  $g' = 1$ ,  $g'' = 0$ , gilt wegen (3.137)

$$H_f(z) \equiv 0 \iff \frac{f''(z)}{1 + [f'(z)]^2} = \frac{1}{f(z)}. \quad (3.230)$$

Wäre  $f'(z) \equiv 0$ , so wäre  $f(z) \equiv \text{const}$  und  $X$  beschriebe einen Zylinder, also keine Minimalfläche! Demnach gibt es Punkte  $z$  mit  $f'(z) \neq 0$ . In der Nähe eines solchen Punktes gilt dann

$$\frac{2f''(z)f'(z)}{1 + [f'(z)]^2} = \frac{2f'(z)}{f(z)},$$

also

$$\log \{1 + [f'(z)]^2\} = \log f^2(z) + \log c_1^2 = \log [c_1^2 f^2(z)],$$

bzw.

$$1 + [f'(z)]^2 = c_1^2 f^2(z). \quad (3.231)$$

oder noch

$$f'(z) = \pm \sqrt{[c_1 f(z)]^2 - 1}. \quad (3.232)$$

Die Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung lautet

$$f(z) = \frac{1}{c_1} \cosh(c_1 z + c_2). \quad (3.233)$$

Also ist der Graph von  $f$  eine Kettenlinie und die entsprechende Fläche das Katenoid (vgl. Beispiel 3.77)

Für die spezielle Wahl  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0$  und  $f(z) = \cosh z$ , bekommt man

$$X(\theta, z) = (\cosh z \cos \theta, \cosh z \sin \theta, z)^\top.$$

**Korollar 3.93** *Das Katenoid ist die einzige Minimalfläche, die gleichzeitig eine Rotationsfläche ist.*

**Beispiel 3.94 Enneper'sche Minimalfläche.** Die Enneper'sche Fläche ist die folgende parametrisierte Fläche

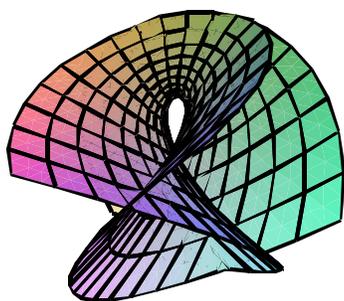
$$X(u, v) := \left( u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, v - \frac{1}{3}v^3 + vu^2, u^2 - v^2 \right)^T. \quad (3.234)$$

Sie ist eine Minimalfläche, die sogar isotherm parametrisiert ist, es gilt also  $\mathcal{E} = \mathcal{G}$ ,  $\mathcal{F} = 0$ . Auf Minimalflächendarstellung der Gleichungen (3.192)-(3.194) führen uns die Funktionen

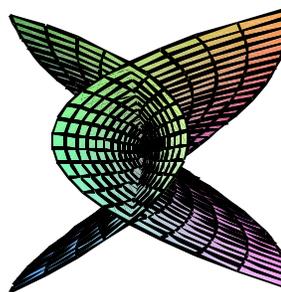
$$\varphi_1(\zeta) = \zeta^2 - 1, \quad \varphi_2(\zeta) = i(\zeta^2 + 1), \quad \varphi_3(\zeta) = 2\zeta, \quad \zeta := u + iv \quad (3.235)$$

und die Weierstrass Darstellung (3.199) erhalten wir durch

$$F(\zeta) = 2, \quad G(\zeta) = \zeta. \quad (3.236)$$



Enneper'sche Fläche  
Fig. 3.23



Catalan'sche Fläche  
Fig. 3.24

**Beispiel 3.95 Catalan'sche Minimalfläche.** Die Catalan'sche Fläche ist die folgende parametrisierte Fläche:

$$X(u, v) := \left( u - \sin u \cosh v, 1 - \cos u \cosh v, 4 \sin \frac{u}{2} \sinh \frac{v}{2} \right)^T. \quad (3.237)$$

Diese Fläche ist eine isotherm parametrisierte Minimalfläche. Um auf die Minimalflächendarstellung (3.192)-(3.194) zu kommen, benötigen wir die Funktionen

$$\varphi_1(\zeta) = 1 - \cosh(-i\zeta), \quad \varphi_2(\zeta) = i \sinh(-i\zeta), \quad \varphi_3(\zeta) = 2 \sinh\left(-\frac{i\zeta}{2}\right) \quad (3.238)$$

und für die Weierstrass Darstellung (3.199) die Funktionen

$$F(\zeta) = 1 - e^{i\zeta}, \quad G(\zeta) = \frac{2 \sinh\left(-\frac{i\zeta}{2}\right)}{1 - e^{i\zeta}}, \quad \zeta := u + iv. \quad (3.239)$$

**Das Bernstein-Problem, 1915:** Gibt es nichtlineare Lösungen der (MFG) auf ganz  $\mathbb{R}^n$ ?

**Satz 3.96** . Jede Minimalfläche in Graphenform, die auf der ganzen Ebene definiert ist, also

$$X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad X = (x^1, x^2, f(x^1, x^2))^\top, \quad f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2) \quad (3.240)$$

ist eben:  $f(x^1, x^2) = a_1 x^1 + a_2 x^2 + b$ , mit konstanten Koeffizienten  $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$ .

**Ohne Beweis (J.C.C. Nitsche 1957):** Siehe [Jo, Satz 4.8]. ■

**Bemerkung 3.97** Dieses Ergebnis läßt sich nicht verallgemeinern:

- Für  $2 \leq n \leq 7$  gibt es **keine** nichttriviale (nichtlineare) Minimalflächen in Graphenform, die auf ganz  $\mathbb{R}^n$  definiert ist.
- Für  $n \geq 8$  **existieren** nichttriviale Minimalflächen in Graphenform, die auf ganz  $\mathbb{R}^n$  definiert sind (Fleming, Almgren, De Giorgi, Simons, Federer 1960-1969; Geometrische Maßtheorie).

## ÜBUNGEN

**Übung 3.1** Betrachten Sie für  $a, b, c \in \mathbb{R}^+ = ]0, \infty[$  die folgenden Teilmengen des  $\mathbb{R}^3$ :

1. das Ellipsoid:

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\};$$

2. das einschalige Hyperboloid:

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\};$$

3. das zweischalige Hyperboloid:

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \right\};$$

4. das elliptische Paraboloid:

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right\};$$

5. das hyperbolische Paraboloid:

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right\}.$$

Skizzieren Sie diese Mengen und stellen Sie möglichst „große“ Teilmengen als parametrisierte Fläche dar.

**Übung 3.2** Betrachten Sie die stereographische Projektion  $\pi : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die einen Punkt  $p = (x, y, z)$  der Sphäre  $S^2$  ohne den Nordpol  $N = (0, 0, 2)$  auf den Schnittpunkt der  $(x, y)$ -Ebene mit der Geraden abbildet, die  $N$  und  $p$  verbindet. Es sei  $(u, v) = \pi(x, y, z)$ , wobei  $(x, y, z) \in S^2 \setminus \{N\}$  und  $(u, v) \in (x, y)$ -Ebene.

1. Zeigen Sie, dass die inverse Abbildung  $\pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$  durch

$$x = \frac{4u}{u^2 + v^2 + 4}, \quad y = \frac{4v}{u^2 + v^2 + 4}, \quad z = \frac{2(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2 + 4}$$

gegeben ist.

2. Welcher Teil der Sphäre kann mit der stereographischen Projektion als parametrisierte Fläche dargestellt werden?
3. Berechnen Sie die Koeffizienten der ersten Fundamentalform:  $\mathcal{E} := |\pi_u^{-1}|^2$ ,  $\mathcal{F} := \pi_u^{-1} \cdot \pi_v^{-1}$  und  $\mathcal{G} := |\pi_v^{-1}|^2$ .

**Übung 3.3** Betrachten Sie das Helikoid (3.161) und das Katenoid (3.154).

1. Skizzieren Sie für  $a > 0$  die folgenden beiden Flächen sowie die Bilder der Gauß-Abbildungen des Helikoids und des Katenoids.
2. Beweisen Sie, dass auch die Kurve

$$X(u, v) := (v \cos u, v \sin u, cu)^\top, \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty, \quad (3.241)$$

ein Helikoid darstellt.

3. Wie unterscheiden sich die folgenden Größen der Kurven (3.154) und (3.241) (Parametrisierungen des Helikoids!):
  - (a) Tangentenvektoren und Normalenvektoren (Gaußabbildungen).
  - (b) Koeffizienten der ersten Fundamentalform.
  - (c) Koeffizienten der zweiten Fundamentalform.

**Übung 3.4** Betrachten Sie die durch

$$X(u, v) = (u, v, u^3 - 3uv^2)$$

gegebene Fläche im  $\mathbb{R}^3$ .

1. Berechnen Sie die Koeffizienten der ersten und zweiten Fundamentalform.
2. Zeigen Sie, daß die Gaußsche Krümmung als Funktion von  $r^2 = u^2 + v^2$  geschrieben werden kann.

3. *Skizzieren Sie die Fläche.*

**Übung 3.5** Sei

$$\alpha : [0, \ell) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad s \mapsto \alpha(t) := (g(t), h(t))^\top, \quad 0 \leq t < \ell \quad (3.242)$$

eine reguläre ebene Kurve mit  $g(t) > 0$  für alle  $t$  und

$$X_\alpha(t, \theta) := (g(t) \cos \theta, g(t) \sin \theta, h(t))^\top, \quad 0 \leq t < \ell, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (3.243)$$

die entsprechende Rotationsfläche zu  $\alpha$ .

1. *Beweisen Sie, dass die Gauß'schen  $K(t, X_\alpha)$ , die mittlere  $H(t, X_\alpha)$  Krümmungen der Drehfläche  $X_\alpha$  und die Krümmung  $\kappa_\alpha$  der erzeugenden Kurve  $\alpha$  in folgender Weise voneinander abhängen:*

$$K(t, X_\alpha) = \frac{\kappa_\alpha(t)h'(t)}{|\alpha'(t)|g(t)}, \quad H(t, X_\alpha) = \frac{1}{2} \left[ \kappa_\alpha(t) + \frac{h'(t)}{|\alpha'(t)|g(t)} \right]. \quad (3.244)$$

2. *Beweisen Sie daß wenn  $\alpha$  bereits nach Bogenlänge parametrisiert ist  $\alpha'(s) \equiv 1$ , für die zugehörige Rotationsfläche  $\text{Spur } X_\alpha$  gilt folgende Satz von Pappus:*

$$\text{Flächeninhalt}(\text{Spur } X_\alpha) = 2\pi \int_0^\ell g(s) ds. \quad (3.245)$$

**Übung 3.6** Berechnen Sie den Flächeninhalt der Sphäre, indem Sie das Flächenelement zur ersten Fundamentalform integrieren (oder mit Formel (3.245)).

**Übung 3.7** Betrachten Sie für  $-\frac{1}{2} < v < \frac{1}{2}$  und für  $0 < u < 2\pi$  die parametrisierte Fläche

$$X(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} \cos \frac{u}{2} \cos u \\ \cos \frac{u}{2} \sin u \\ \sin \frac{u}{2} \end{pmatrix}.$$

1. *Berechnen Sie die Gauß-Abbildung  $N(u, v)$  und die erste Fundamentalform der Fläche.*
2. *Berechnen Sie  $\lim_{u \rightarrow 0} N(u, 0)$  und  $\lim_{u \rightarrow 2\pi} N(u, 0)$ . Interpretieren Sie das Ergebnis.*
3. *Zeigen Sie, daß für die Gaußsche Krümmung gilt:*

$$K = -\frac{4}{\left[ v^2 + 4 \left( 1 + v \cos \frac{u}{2} \right)^2 \right]^2}.$$

**Übung 3.8** Betrachten Sie die parametrisierte Fläche (Enneperfläche)

$$X(u, v) = \left( u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right).$$

Zeigen Sie:

1. Die Koeffizienten der ersten Fundamentalform sind  $\mathcal{E} = \mathcal{G} = (1 + u^2 + v^2)^2$ ,  $\mathcal{F} = 0$ .
2. Die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform sind  $\mathcal{L} = 2$ ,  $\mathcal{N} = -2$ ,  $\mathcal{M} = 0$ .
3. Die mittlere Krümmung ist identisch Null, und für die Gaußsche Krümmung gilt:

$$K = -\frac{4}{(1 + u^2 + v^2)^4}.$$

**Übung 3.9** Betrachten Sie die Fläche, die man durch Rotation der Kurve  $y = x^3$ ,  $-1 < x < 1$ , um die Gerade  $x = 1$  erhält. Zeigen Sie, daß die Punkte, die man durch Rotation des Ursprungs  $(0, 0)$  der Kurve erhält, Flachpunkte der Fläche sind.

**Übung 3.10** Sei

$$X : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad X(x, y) = \left(x, y, \log \frac{\cos y}{\cos x}\right).$$

Berechnen Sie die Hauptkrümmungen von die Fläche  $X$ .

**Übung 3.11** Sei  $\alpha : [0, \ell) \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine reguläre Kurve auf einer Fläche  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit überall positiver Gauß'sche Krümmung. Zeigen Sie für die Krümmung  $\kappa_\alpha$  der Kurve und die Hauptkrümmungen  $\kappa_1, \kappa_2$  der Fläche daß überall  $\kappa_\alpha \geq \kappa_1$  gilt.

**Übung 3.12** Es sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , eine reguläre Fläche ohne Selbstüberschneidungen. Zeigen Sie für  $(u, v) \in \Omega$  und  $w \in T_{u,v}X$  dass: Es gibt eine differenzierbare Kurve  $X(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$  mit  $X(\alpha_1(0), \alpha_2(0)) = X(u, v)$  und  $\left. \frac{d}{dt} X(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \right|_{t=0} = w$ .

**Übung 3.13** Bestimmen Sie die Krümmungslinien und die Asymptotenlinien der Enneperfläche (siehe Ser. 8, Aufg. 2).

**Übung 3.14** Es sei  $a > 0$  und  $X(u, v)$  eine reguläre Fläche mit Gaußscher Krümmung  $K_X$ , mittlerer Krümmung  $H_X$  und mit  $(1 - 2H_X a + K_X a^2) > 0$ . Eine Parallelfläche zu  $X$  ist eine parametrisierte Fläche

$$Y(u, v) = X(u, v) + aN(u, v).$$

1. Zeigen Sie, dass  $Y(u, v)$  eine reguläre Fläche ist.

2. Beweisen Sie, dass die Gaußsche Krümmung  $K_Y$  von  $Y$  durch

$$K_Y := \frac{K_X}{1 - 2H_X a + K_X a^2}$$

und die mittlere Krümmung  $H_Y$  von  $Y$  durch

$$H_Y := \frac{H_X - K_X a}{1 - 2H_X a + K_X a^2}$$

gegeben ist.

3. Die Fläche  $X$  habe konstante mittlere Krümmung  $H_X = c \neq 0$ . Betrachten Sie die Parallelfäche  $Y$  zu  $X$  im Abstand  $1/(2c)$  und zeigen Sie, dass diese Parallelfäche konstante Gaußsche Krümmung gleich  $K_Y = 4c^2$  hat.

**Übung 3.15** Zeigen Sie, dass bei einem hyperbolischen Punkt die Hauptkrümmungsrichtungen die Winkel zwischen den Asymptotenrichtungen halbieren.

**Übung 3.16** Zeigen Sie: Wenn die mittlere Krümmung in einem nicht ebenen Punkt Null ist, so gibt es in diesem Punkt zwei orthogonale Asymptotenrichtungen.

**Übung 3.17** Sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  Fläche und  $\alpha : I \rightarrow \text{Spur } X$  eine Gerade auf Spur  $X$ . Zeigen Sie, dass Spur  $\alpha$  Asymptotenlinie ist.

**Übung 3.18** Zeigen Sie, dass die Wendelfläche (helikoid oder Schraubenfläche; vgl. Beispiel 1.14, Beispiel 3.27, Beispiel 3.78, Übung 3.3 und Fig. 3.19) eine Regelfläche ist. Bestimmen Sie Asymptotenlinien und Krümmungslinien von Wendelfläche.

**Übung 3.19** Es sei  $S \subset \mathbb{R}^3$  eine Regelfläche. Zeigen Sie, dass für die Gaußsche Krümmung  $K_S$  gilt

$$K_S \leq 0.$$

**Übung 3.20** Wenn zwei differenzierbare Funktionen  $f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die Cauchy-Riemannschen Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial v}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{\partial g}{\partial u}$$

erfüllen, sieht man leicht, daß sie harmonisch sind; in dieser Situation nennt man  $f$  und  $g$  konjugiert harmonisch. Es seien  $X$  und  $Y$  isotherme Parametrisierungen von Minimalflächen, so daß ihre Komponentenfunktionen paarweise konjugiert harmonisch sind; dann heißen  $X$  und  $Y$  konjugierte Minimalflächen. Beweisen Sie:

1. Das Helikoid und das Katenoid sind konjugierte Minimalflächen.

2. Sind zwei konjugierte Minimalflächen  $X$  und  $Y$  gegeben, so ist die Fläche

$$Z = (\cos t)X + (\sin t)Y \quad (3.246)$$

wiederum eine Minimalfläche für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

3. Alle Flächen der Ein-Parameter-Familie (3.246) haben dieselbe erste Fundamentalform:

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = \langle Y_u, Y_u \rangle, \quad F = 0, \quad G = \langle X_v, X_v \rangle = \langle Y_v, Y_v \rangle.$$

Daher können zwei konjugierte Minimalflächen durch eine Ein-Parameter-Familie von Minimalflächen verbunden werden, und die erste Fundamentalform dieser Familie ist unabhängig von  $t$ .

**Übung 3.21** Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet,  $X$  eine isotherm parametrisierte Minimalfläche, und  $X^*$  sei so gegeben, dass die Funktion  $f := X + iX^*$ ,

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3, \quad (u + iv) = w \mapsto (f_1(w), f_2(w), f_3(w))^T$$

eine holomorphe Kurve in  $\mathbb{C}^3$  ist. Zeigen Sie:

1. Die Funktion  $f$  ist eine isotrope Kurve in  $\mathbb{C}^3$ , d.h.

$$(f'_1(w))^2 + (f'_2(w))^2 + (f'_3(w))^2 = 0.$$

2. Ist umgekehrt  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$  eine (holomorphe) isotrope Kurve in  $\mathbb{C}^3$ , so sind

$$Y(u, v) := \operatorname{Re} g(w), \quad Y^*(u, v) := \operatorname{Im} g(w)$$

Minimalflächen in  $\mathbb{R}^3$ .

**Übung 3.22** Sei  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X : (u, v) \mapsto (u, v, u(v^2 - 3v^2))^T$  die Fläche. Zeigen Sie, dass der Punkt  $(0, 0)$  Flachpunkt ist. Skizzieren Sie den Schnitt von  $X$  mit einer Ebene  $(u, v) \mapsto (u, v, \varepsilon)^T$  für kleines  $\varepsilon$ .

**Übung 3.23** Sei  $\ell$  eine Gerade und sei  $X$  eine Regelfläche, deren Leitkurve  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Gerade  $\ell$  nicht schneidet und deren Regelgeraden  $\ell$  senkrecht schneiden ( $X$  heißt rechtwinkliges Konoid).

Parametrisieren Sie  $X$  und bestimmen Sie, wann  $X$  nichtzylindrisch ist.

**Übung 3.24** Zeigen Sie, dass eine Fläche  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , genau dann eine Minimalfläche ohne Flachpunkte ist, wenn für alle  $\omega \in \Omega$ ,  $z = F(\omega)$ , gilt

$$\kappa_1(\omega) \neq \kappa_2(\omega) \quad \text{und} \quad \forall X, Y \in \mathcal{T}_z F(\Omega) : DN_F X \cdot DN_F Y = \kappa_1^2(\omega) X \cdot Y,$$

wobei  $N_F(\omega)$  die Gauß'sche Abbildung (Einheitsnormalvektor) bezeichnet.

**Übung 3.25** Sei  $F$  wie in Aufgabe 3.24 und sei  $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Minimalfläche ohne Flachpunkte.

- a. Sei  $\omega \in \Omega$ ,  $N_F(\omega) \neq N$ , wobei  $N = (0, 0, 2)^\top$  der Nordpol bezeichnet. Folgern Sie aus Aufgabe 3.25, dass  $F^{-1}N_F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  lokal um  $\omega$  invertierbar ist.
- b. Zeigen Sie mit Aufgabe 3.25, dass  $\widetilde{M} := M \circ N_F^{-1} \circ F$  isotherm ist. (Für  $N_F(\Omega) = N$  könnte man natürlich die Projektion über den Südpol verwenden).

## 4 INNERE GEOMETRIE VON FLÄCHEN

### 4.1 ISOMETRIEN

Da wir uns nun mit Fragen der inneren Geometrie beschäftigen werden, die also unabhängig von der Parametrisierung sein sollen, betrachten wir ab jetzt nur noch **geometrisch reguläre Flächen**. Insbesondere soll in jedem Punkt  $p$  einer solchen Fläche  $S$  ein eindeutig bestimmter Tangentialraum  $T_p S$  existieren. Insbesondere darf  $S$  keine Selbstüberschneidungen haben.

**Definition 4.1** Eine Teilmenge  $S \subset \mathbb{R}^3$  heißt reguläre (eingebettete) Fläche, wenn gilt:  $\forall p \in S$  existiert eine Umgebung  $V$  von  $p$  in  $\mathbb{R}^3$  sowie eine bijektive Abbildung

$$X : U \rightarrow V \cap S \subset \mathbb{R}^3, \quad U \subset \mathbb{R}^2 \text{ offen} \quad (4.1)$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- i.  $X$  ist glatt (als Abbildung nach  $\mathbb{R}^3$ ).
- ii. Für jeden Punkt  $(u, v) \in U$  ist  $DX_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  injektiv.
- iii. Die inverse Abbildung  $X^{-1} : V \cap S \rightarrow U$  ist stetig, d.h. es gibt  $W \subset \mathbb{R}^3$  offen mit  $V \cap S \subset W$  und eine stetige Abbildung  $F : W \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $F|_{V \cap S} = X^{-1}$ .

**Bemerkung 4.2** Definition 4.1 definiert eine zweidimensionale unendlich oft differenzierbare, also glatte Mannigfaltigkeit!

Bedingung (iii) ist wichtig, da sonst nicht erwünschte Fälle möglich sind (z. B. Selbstüberschneidungen).

Der Tangentialraum einer regulären Fläche  $S$  in einem Punkt  $p \in S$  ist dann (vgl. Definition 4.1 für Bezeichnungen)

$$T_p S := DX(X^{-1}(p))(\mathbb{R}^2) = DX|_{X^{-1}(p)}(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$$

**Bemerkung 4.3** Die Definition von  $T_p S$  ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung  $X$ .

**Definition 4.4** Eine Abbildung  $\varphi : S \rightarrow \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  einer regulären Fläche  $S$  heißt differenzierbar (glatt), wenn gilt: Zu jedem  $p \in S$  gibt es Parametrisierungen  $X$  von  $S$  nahe  $p$  und  $Y$  von  $\mathcal{M}$  nahe  $\varphi(p)$ , so dass

$$Y^{-1} \circ \varphi \circ X$$

differenzierbar (glatt) ist. Ein Diffeomorphismus  $\varphi : S \rightarrow \mathcal{M}$  ist eine bijektive glatte Abbildung, deren Umkehrabbildung  $\varphi^{-1}$  ebenfalls glatt ist.

Ein Diffeomorphismus  $\varphi : S \rightarrow \mathcal{M}$  von Flächen veranlasst die lineare Abbildung von entsprechenden Tangenzialräumen  $d\varphi_p : T_p S \rightarrow T_{\varphi(p)} \mathcal{M}$  die durch

$$d\varphi_p(w) = DY \Big|_{Y^{-1}(\varphi(p))} D(Y^{-1} \circ \varphi \circ X) \Big|_{X^{-1}(p)} \left( DX \Big|_{X^{-1}(p)} \right)^{-1} (w) \quad (4.2)$$

gegeben ist, wobei sind die Abbildungen

$$DX \Big|_{X^{-1}(p)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p S \quad \text{und} \quad DY \Big|_{Y^{-1}(\varphi(p))} : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{\varphi(p)} \mathcal{M}$$

invertierbar nach Definition 4.1.

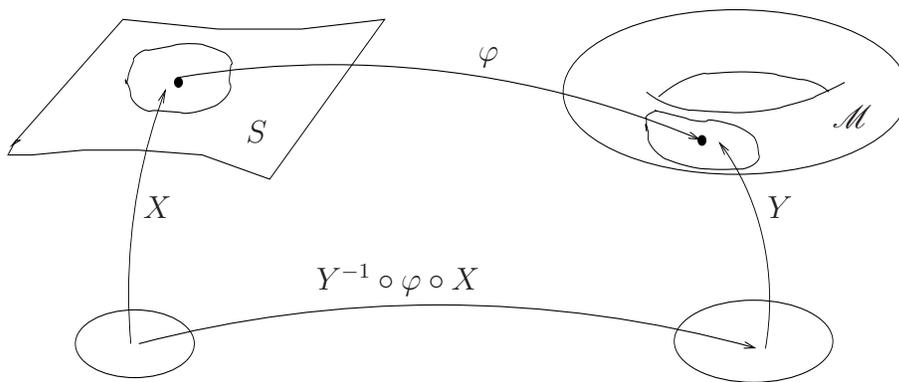


Fig. 4.1

**Definition 4.5** Ein Diffeomorphismus  $\varphi : S \rightarrow \mathcal{M}$  heißt *Isometrie*, wenn gilt: Für jedes  $p \in S$  und beliebiges Tangentenvektor  $w \in T_p S$  ist

$$|w| = |d\varphi_p(w)|. \quad (4.3)$$

$S$  und  $\mathcal{M}$  heißen dann *isometrisch*.

**Satz 4.6** Eine Isometrie  $\varphi$  erhält die erste Fundamentalform

$$w \cdot \theta = I_p^S(w, \theta) = I_{\varphi(p)}^{\mathcal{M}}(d\varphi_p(w), d\varphi_p(\theta)) = d\varphi_p(w) \cdot d\varphi_p(\theta). \quad (4.4)$$

*Vice versa:* Erhält ein Diffeomorphismus  $\varphi$  die erste Fundamentalform, so ist  $\varphi$  eine Isometrie.

**Beweis:** Bei einer Isometrie  $\varphi$  erhält das Differential  $d\varphi$  den norm, dann gilt für  $w, \tilde{w} \in T_p S$

$$\begin{aligned}
 w \cdot \tilde{w} &= \frac{1}{2} \{ |w + \tilde{w}|^2 - |w|^2 - |\tilde{w}|^2 \} = \frac{1}{2} \{ I_p(w + \tilde{w}, w + \tilde{w}) - I_p(w, w) - I_p(\tilde{w}, \tilde{w}) \} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ I_{\varphi(p)} [d\varphi_p(w + \tilde{w}), d\varphi_p(w + \tilde{w})] - I_{\varphi(p)} [d\varphi_p(w), d\varphi_p(w)] \right. \\
 &\quad \left. - I_{\varphi(p)} [d\varphi_p(\tilde{w}), d\varphi_p(\tilde{w})] \right\} \\
 &= d\varphi_p(w) \cdot d\varphi_p(\tilde{w})
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

und ist also  $\varphi$  eine Isometrie.

Vice versa: wenn die erste Fundamentalform erhalten bleibt, dann bleibt der norm erhalten (setze  $w = \theta$  in (4.4)). ■

**Definition 4.7** Eine Abbildung  $\varphi : S \rightarrow \mathcal{M}$  heißt **lokale Isometrie** (oder:  $S$  **lokal isometrisch** zu  $\mathcal{M}$ ), wenn gilt: zu jedem  $p \in S$  gibt es eine Umgebung  $V$  von  $p$  (in  $\mathbb{R}^3$ ), so dass

$$\varphi|_{V \cap S} : V \cap S \rightarrow \varphi(V \cap S) \subset \mathcal{M}$$

eine Isometrie ist.

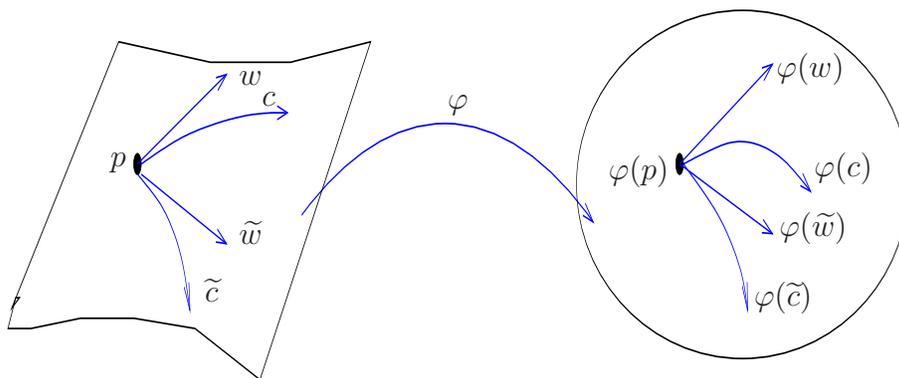


Fig. 4.2

**Geometrisch:** Betrachte Kurven

$$c_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S, \quad c_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S,$$

die sich bei  $t = 0$  schneiden. Für den Schnittwinkel  $\theta$  bei  $t = 0$  gilt

$$\cos \theta = \frac{c_1'(0)}{|c_1'(0)|} \cdot \frac{c_2'(0)}{|c_2'(0)|} = \frac{c_1'(0) \cdot c_2'(0)}{|c_1'(0)| |c_2'(0)|}. \tag{4.6}$$

Unter einer Isometrie  $\varphi : S \rightarrow \mathcal{M}$  werden diese Kurven abgebildet auf

$$\tilde{c}_1 := \varphi \circ c_1, \quad \tilde{c}_2 := \varphi \circ c_2, \quad \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}, \quad (4.7)$$

die sich ebenfalls bei  $t = 0$  (in  $\varphi(c_1(0)) = \varphi(c_2(0))$ ) schneiden.

**Lemma 4.8** *Eine lokale Isometrie ist langetreu und winkeltreu: die erhält die Vektorlänge von Tangentenvektoren*

$$|w| = |d\varphi_p(w)| \quad \forall w \in T_p(S), \quad p \in S \quad (4.8)$$

und den Winkel

$$\cos \theta = \frac{c'_1(0)}{|c'_1(0)|} \cdot \frac{c'_2(0)}{|c'_2(0)|} = \frac{\tilde{c}'_1(0)}{|\tilde{c}'_1(0)|} \cdot \frac{\tilde{c}'_2(0)}{|\tilde{c}'_2(0)|} = \cos \tilde{\theta} \quad (4.9)$$

zwischen den abgebildete Kurven.

**Beweis.** (4.8) folgt direkt aus (4.3), angenommen  $\tilde{w} = w$ .

Für den Winkel  $\tilde{\theta}$  bei  $t = 0$  der Kurven  $\varphi \circ c_1$  und  $\varphi \circ c_2$  in (4.7) gilt mit Hilfe von (4.8):

$$\cos \tilde{\theta} = \frac{(\varphi \circ c_1)'(0) \cdot (\varphi \circ c_2)'(0)}{|(\varphi \circ c_1)'(0)| |(\varphi \circ c_2)'(0)|} = \frac{c'_1(0) \cdot c'_2(0)}{|c'_1(0)| |c'_2(0)|} = \cos \theta. \quad \blacksquare$$

**Beispiel 4.9** *Betrachte*

$$S = \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{M} = \text{Zylinder} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Es sei  $\varphi : S \rightarrow \mathcal{M}$  gegeben durch

$$\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)^\top.$$

Dann ist  $\varphi$  eine lokale Isometrie, denn für  $w = (w_1, w_2)^\top \in \mathbb{R}^2$  da

$$d\varphi(u, v)w = \tilde{d}\varphi(u, v)(\tilde{w}), \quad \tilde{w} = (w_1, w_2, 0)^\top \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{natürliche Einbettung!})$$

wobei  $\det \tilde{d}\varphi(u, v) \equiv 1$  ist invertierbar, und

$$\begin{aligned} d\varphi(u, v) &= \begin{bmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{d}\varphi(u, v) := \begin{bmatrix} -\sin u & 0 & \cos u \\ \cos u & 0 & \sin u \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ d\varphi(u, v)(w) \cdot d\varphi(u, v)(w) &= \left| (-(\sin u)w_1, (\cos u)w_1, w_2) \right|^2 \\ &= w_1^2(\sin^2 u + \cos^2 u) + w_2^2 = |w|^2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Da  $\varphi$  nicht injektiv ist, ist  $\varphi$  keine globale Isometrie (schon aus topologischen Gründen nicht möglich).

**Satz 4.10** Eine lokale Isometrie  $\varphi : S \rightarrow \mathcal{M}$  von zwei regulären Flächen  $S$  und  $\mathcal{M}$  existiert dann und nur dann, wenn es Parametrisierungen  $X : U \rightarrow S$  und  $Y : U \rightarrow \mathcal{M}$  gibt so, dass für die zugehörigen ersten Fundamentalformen gilt

$$\mathcal{E}^S = \mathcal{E}^{\mathcal{M}}, \quad \mathcal{F}^S = \mathcal{F}^{\mathcal{M}}, \quad \mathcal{G}^S = \mathcal{G}^{\mathcal{M}} \quad \text{auf } U. \quad (4.11)$$

**Beweis.** Zuerst behaupten wir die Existenz von Parametrisierungen  $X : U \rightarrow S, Y : U \rightarrow \mathcal{M}$ . Beweisen wir, dass die Abbildung

$$\varphi := Y \circ X^{-1} : X(U) \rightarrow \mathcal{M}. \quad (4.12)$$

eine lokale Isometrie ist. In der Tat: es sei  $p \in X(U)$  und  $w \in T_p S$  und

$$X(\alpha(0)) = p \quad \text{und} \quad \left. \frac{d}{dt} X(u(t), v(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} X(\alpha(t)) \right|_{t=0} = w \quad (4.13)$$

sei die Kurve, wobei  $\alpha(t) = (u(t), v(t))^T$  eine Kurve in  $U$  ist. Dann gilt

$$w = \left. \frac{d}{dt} X(u(t), v(t)) \right|_{t=0} = X_u \Big|_{\alpha(0)} u'(0) + X_v \Big|_{\alpha(0)} v'(0). \quad (4.14)$$

Nun ist, wegen (4.2) und (4.12),

$$\begin{aligned} d\varphi_p(w) &= \left[ DY \Big|_{Y^{-1}(\varphi(p))} \underbrace{D(Y^{-1} \circ Y \circ X^{-1} \circ X) \Big|_{X^{-1}(p)}}_{\text{I= Identität}} \right] \left[ DX \Big|_{X^{-1}(p)} \right]^{-1} (w) \\ &= DY \Big|_{\alpha(0)} \alpha'(0) = Y_u \Big|_{\alpha(0)} u'(0) + Y_v \Big|_{\alpha(0)} v'(0) \end{aligned} \quad (4.15)$$

denn, wegen (4.12), (4.13),

$$Y^{-1}(\varphi(p)) = Y^{-1}(Y \circ X^{-1}(X(\alpha(0)))) = \alpha(0)$$

und wegen (4.14)

$$\left[ DX \Big|_{X^{-1}(p)} \right]^{-1} (w) = \left[ DX \Big|_{\alpha(0)} \right]^{-1} (w) = \alpha'(0).$$

Für die jeweiligen ersten Fundamentalformen gilt

$$|d\varphi_p(w)|^2 = I_{\varphi(p)}^{\mathcal{M}}((d\varphi_p(w), d\varphi_p(w))) = \mathcal{E}^{\mathcal{M}}(u')^2 + 2\mathcal{F}^{\mathcal{M}} u'v' + \mathcal{G}^{\mathcal{M}}(v')^2 \quad (4.16)$$

wegen (4.15) und

$$|w|^2 = I_p^S(w, w) = \mathcal{E}^S(u')^2 + 2\mathcal{F}^S u'v' + \mathcal{G}^S(v')^2 \quad (4.17)$$

wegen (4.14). Nun, wegen (4.11), erhalten wir die entscheidende Gleichung

$$|d\varphi_p(w)|^2 = |w|^2, \quad (4.18)$$

welche die behauptete lokale Isometrie beweist.

Nehmen wir zunächst an, dass  $\varphi : S \rightarrow \mathcal{M}$  eine lokale Isometrie und  $X : U \rightarrow S$  eine Parametrisierung ist. Dann ist  $Y := \varphi \circ X : U \rightarrow \mathcal{M}$  entsprechend eine Parametrisierung von  $\mathcal{M}$  und es gilt  $Y_u = d\varphi_p(X_u)$ ,  $Y_v = d\varphi_p(X_v)$ . Andererseits bleibt das Skalarprodukt gemäß Annahme erhalten:

$$w \cdot \theta = d\varphi_p(w) \cdot d\varphi_p(\theta) \quad \forall w, \theta \in \mathcal{T}_p S.$$

Damit werden auch die Koeffizienten der ersten Fundamentalformen gleich

$$\mathcal{E}^S = X_u \cdot X_v = d\varphi_p(X_u) \cdot d\varphi_p(X_v) = Y_u \cdot Y_v = \mathcal{E}^{\mathcal{M}}$$

und ähnlich folgen die weiteren zwei Gleichungen aus (4.11). ■

**Beispiel 4.11** Für eine Rotationsfläche  $S$  und die Parametrisierung

$$X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))^T$$

mit  $f(v) > 0$  erhält man

$$\mathcal{E} = f^2, \quad \mathcal{F} = 0, \quad \mathcal{G} = (f')^2 + (g')^2.$$

Angewandt auf das Katenoid

$$X^{K^a}(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, a v) \quad (4.19)$$

erhält man so

$$\mathcal{E}^{K^a} = a^2 \cosh^2 v, \quad \mathcal{F}^{K^a} = 0, \quad \mathcal{G}^{K^a} = a^2(1 + \sinh^2 v) = a^2 \cosh^2 v. \quad (4.20)$$

Für das Helikoid benutzen wir die Parametrisierung (3.206)

$$X^{H^a}(u, v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, a u) \quad (4.21)$$

und berechnen (s.o.)

$$\mathcal{E}^{H^a} = a^2 \cosh^2 v, \quad \mathcal{F}^{H^a} = 0, \quad \mathcal{G}^{H^a} = a^2 \cosh^2 v. \quad (4.22)$$

**Satz 4.12** Katenoid und Helikoid sind lokal isometrisch.

**Beweis.** Die Behauptung folgt mit Hilfe von (4.20) und (4.22) unmittelbar aus Satz 4.10. ■

**Beispiel 4.13** Ein einschaliger Kegel (ohne Spitze; vgl. Fig. 4.2)

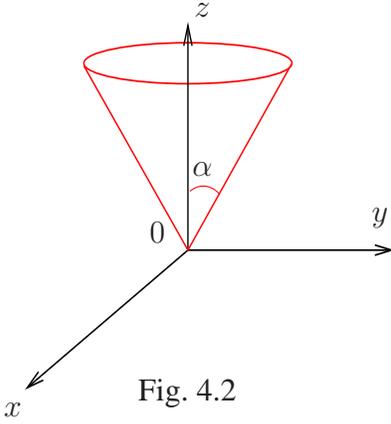


Fig. 4.2

$$\mathcal{K}_\alpha := \left\{ (x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : z = k\sqrt{x^2 + y^2} \right\}, \quad (4.23)$$

$$k = \cot \alpha > 0, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

ist lokal isometrisch zur Ebene.  $2\alpha$  ist offenbar der Öffnungswinkel des Kegels. Definiere  $W_\alpha \subset \mathbb{R}^2$  und  $U_\alpha \subset \mathbb{R}^3$  durch

$$W_\alpha := \left\{ (\rho, \theta)^\top : 0 < \rho < \infty, \quad 0 < \theta < 2\pi \sin \alpha \right\},$$

$$U_\alpha := \left\{ (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 0)^\top : 0 < \rho < \infty, \quad 0 < \theta < 2\pi \sin \alpha \right\}$$

und die Abbildungen

$$\begin{aligned} \tilde{F}_\alpha &= (\tilde{F}_\alpha^1, \tilde{F}_\alpha^2, \tilde{F}_\alpha^3)^\top : W_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ X_\alpha &: W_\alpha \rightarrow U_\alpha \end{aligned}$$

durch

$$\begin{aligned} \tilde{F}_\alpha(\rho, \theta) &= \left( \rho \sin \alpha \cos \left( \frac{\theta}{\sin \alpha} \right), \rho \sin \alpha \sin \left( \frac{\theta}{\sin \alpha} \right), \rho \cos \alpha \right)^\top, \\ X_\alpha(\rho, \theta) &:= (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 0)^\top, \quad (\rho, \theta) \in W_\alpha. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Wegen

$$\begin{aligned} k\sqrt{x^2 + y^2} &= \cot \alpha \sqrt{(\tilde{F}_\alpha^1)^2 + (\tilde{F}_\alpha^2)^2} = \cot \alpha \sqrt{\rho^2 \sin^2 \alpha} \\ &= \rho \cos \alpha = \tilde{F}_\alpha^3 = z \end{aligned}$$

ist

$$\text{Graph } \tilde{F}_\alpha = \tilde{F}_\alpha(W_\alpha) \subset \mathcal{K}_\alpha.$$

Da  $(0, 2\pi \sin \alpha) \ni \theta \rightarrow \frac{\theta}{\sin \alpha} \in (0, 2\pi)$  bijektiv ist, stellt man fest, dass

$$F_\alpha := \tilde{F}_\alpha \circ X_\alpha^{-1} : U_\alpha \rightarrow \mathcal{K}_\alpha \setminus \left\{ (\rho \sin \alpha, 0, \rho \cos \alpha)^\top \right\}$$

ein Diffeomorphismus ist.

Um nachzuweisen, dass  $F_\alpha$  eine Isometrie ist, berechnen wir die Koeffizienten der ersten Fundamentalform für  $U_\alpha$ :

$$\tilde{\mathcal{E}}_\alpha = 1, \quad \tilde{\mathcal{F}}_\alpha = 0, \quad \tilde{\mathcal{G}}_\alpha = \rho^2.$$

Für die Parametrisierung des Kegels  $\mathcal{K}_\alpha$  durch  $\tilde{F}_\alpha = F_\alpha \circ X_\alpha$  gilt ebenfalls

$$\mathcal{E}_\alpha = 1, \quad \mathcal{F}_\alpha = 0, \quad \mathcal{G}_\alpha = \rho^2.$$

Damit ist (nach Satz 4.10)

$$F_\alpha = (F_\alpha \circ X_\alpha) \circ X_\alpha^{-1}$$

eine lokale Isometrie.

**Isometrien und Bogenlänge.** Sei  $S \subset \mathbb{R}^3$  eine reguläre und zusammenhängende Fläche. Wir wollen einen inneren Abstand auf  $S$  definieren. Dazu setzen wir für  $p, q \in S$

$$d(p, q) := \inf \left\{ \mathcal{L}(c) : c - \text{Kurve in } S \text{ von } p \text{ nach } q \right\}, \quad (4.25)$$

wobei  $\mathcal{L}(c)$  die Länge der Kurven  $c$  bezeichnet.

**Lemma 4.14** *Das in (4.25) definierte  $d$  ist eine Metrik auf  $S$ . Es gilt also:*

- i.  $d(p, q) = 0 \iff p = q \quad \forall p, q \in S$ .
- ii.  $d(p, q) = d(q, p) \quad \forall p, q \in S$ .
- iii.  $d(p, q) \leq d(p, w) + d(w, q) \quad \forall p, q, w \in S$  (Dreiecksungleichung!).

**Beweis.** (i.) Folgt aus der Ungleichung  $d(p, q) \geq |p - q| = \text{euklid. Abstand}$ .

(ii.) Trivial.

(iii.) Um die Dreiecksungleichung zu zeigen, bemerken wir zuerst dass die Ungleichung in den Fällen  $d(p, w) = \infty$  und  $d(w, q) = \infty$  erfüllt ist. Falls  $d(p, w) < \infty$  und  $d(w, q) < \infty$  wähle Wege  $c_1$  von  $p$  nach  $w$  und  $c_2$  von  $w$  nach  $q$ , so dass für  $\varepsilon > 0$  gegeben,

$$\mathcal{L}(c_1) + \mathcal{L}(c_2) \leq d(p, w) + d(w, q) + \varepsilon.$$

Der zusammengesetzte Weg  $c_1 \cup c_2$  führt von  $p$  nach  $q$ , so dass

$$d(p, q) \leq \mathcal{L}(c_1 \cup c_2) = \mathcal{L}(c_1) + \mathcal{L}(c_2) \leq d(p, w) + d(w, q) + \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt die behauptete Dreiecksungleichung. ■

### Charakterisierung von Isometrien.

**Satz 4.15** *Ein Diffeomorphismus  $\varphi : S \rightarrow \mathcal{M}$  ist genau dann eine Isometrie, wenn für alle Kurven  $c$  in  $S$  gilt*

$$\mathcal{L}^S(c) = \mathcal{L}^{\mathcal{M}}(\varphi \circ c). \quad (4.26)$$

**Beweis.** Es sei  $\varphi : S \rightarrow \mathcal{M}$  eine Isometrie und  $c : [a, b] \rightarrow S$  eine parametrisierte Kurve. Da die Tangentvektoren  $c'(t)$  und  $(\varphi \circ c)'(t)$ , wegen der isometrischen Eigenschaft von  $\varphi$ , gleiche Länge haben, gilt

$$\mathcal{L}^S(c) = \int_a^b |c'(t)| dt = \int_a^b |(\varphi \circ c)'(t)| dt = \mathcal{L}^{\mathcal{M}}(\varphi \circ c)$$

und (4.26) folgt unmittelbar.

Es gelte nun (4.26), aber  $\varphi$  sei keine Isometrie: es gebe also  $p \in S$  sowie  $0 \neq w \in T_p(S)$  mit (ohne Einschränkung "kleiner")

$$I_p^S(w, w) < I_{\varphi(p)}^{\mathcal{M}}(d\varphi_p(w), d\varphi_p(w)).$$

Sei  $c : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow S$  eine Kurve mit  $c(0) = p$ ,  $c'(0) = w$ , so dass

$$|c'(0)|^2 = I_p^S(w, w) < I_{\varphi(p)}^{\mathcal{M}}(d\varphi_p(w), d\varphi_p(w)) = |(\varphi \circ c)'(0)|^2. \quad (4.27)$$

Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass  $\varepsilon > 0$  so klein ist, dass (4.27) auch für  $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$  gilt, da  $|c'(t)|$  und  $|(\varphi \circ c)'(t)|$  stetig auf  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  ist. Daraus folgt ein Widerspruch:

$$\mathcal{L}^S(c) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |c'(t)| dt < \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |(\varphi \circ c)'(t)| dt = \mathcal{L}^{\mathcal{M}}(\varphi \circ c). \quad \blacksquare$$

**Korollar 4.16** *Es seien  $S, \mathcal{M}$  zusammenhängende Flächen,  $\varphi : S \rightarrow \mathcal{M}$  ein Diffeomorphismus. Ist  $\varphi$  eine Isometrie, so gilt*

$$d^S(p, q) = d^{\mathcal{M}}(\varphi(p), \varphi(q)) \quad \forall p, q \in S. \quad (4.28)$$

**Beweis.** Sei  $c$  eine Kurve in  $S$  von  $p$  nach  $q$ , also  $\varphi \circ c$  eine Kurve in  $\mathcal{M}$  von  $\varphi(p)$  nach  $\varphi(q)$ . Dann folgt

$$\mathcal{L}^S(c) = \mathcal{L}^{\mathcal{M}}(\varphi \circ c)$$

und somit

$$d^S(p, q) = \inf \mathcal{L}^S(c) = \inf \mathcal{L}^{\mathcal{M}}(\varphi \circ c) \geq \inf \mathcal{L}^{\mathcal{M}}(\tilde{c}) \geq d^{\mathcal{M}}(\varphi(p), \varphi(q)).$$

Da auch  $\varphi^{-1} : \mathcal{M} \rightarrow S$  eine Isometrie ist, folgt auch die umgekehrte Ungleichung, und damit die Behauptung.  $\blacksquare$

**Bemerkung 4.17** *Es gilt sogar die Äquivalenz (Vgl. später)*

$$\varphi \text{ Isometrie} \quad \iff \quad d^S = d^{\mathcal{M}}.$$

## 4.2 KONFORME ABBILDUNGEN

**Definition 4.18** Ein Diffeomorphismus  $\varphi : S \rightarrow \mathcal{M}$  von reguläre Flächen heißt **konform**, wenn gilt: für alle  $p \in S$  und alle  $w, \tilde{w} \in T_p S$  ist

$$d\varphi_p(w) \cdot d\varphi_p(\tilde{w}) = \lambda^2(p)w \cdot \tilde{w}, \quad (4.29)$$

wobei  $\lambda^2(p) > 0$  eine glatte Funktion auf  $S$  ist.

$S$  und  $\mathcal{M}$  heißen dann auch **konform äquivalent**.

**Lokal konform** definiert man analog zu lokal isometrisch (vgl. Definition 4.7).

Im Gegensatz zur Isometrie, die beides, winkel- und längentreu ist (vgl. Lemma 4.8), ist eine konforme Abbildung nur winkeltreu.

**Lemma 4.19** Eine konforme Abbildung erhält die Winkel.

**Beweis.** Für den Schnittwinkel  $\tilde{\theta}$  in  $t = 0$  für Kurven  $\varphi \circ c_1$  und  $\varphi \circ c_2$  in (4.7) gilt

$$\cos \tilde{\theta} = \frac{(\varphi \circ c_1)'(0)}{|(\varphi \circ c_1)'(0)|} \cdot \frac{(\varphi \circ c_2)'(0)}{|(\varphi \circ c_2)'(0)|} = \frac{\lambda^2 c_1'(0) \cdot c_2'(0)}{\lambda^2 |c_1'(0)| |c_2'(0)|} = \cos \theta. \quad \blacksquare$$

**Satz 4.20** Eine lokal konforme Abbildung  $\varphi : S \rightarrow \mathcal{M}$  von zwei regulären Flächen  $S$  und  $\mathcal{M}$  existiert dann und nur dann, wenn es Parametrisierungen  $X : U \rightarrow S$  und  $Y : U \rightarrow \mathcal{M}$  gibt so, dass für die zugehörigen ersten Fundamentalformen gilt

$$\mathcal{E}^{\mathcal{M}} = \lambda^2 \mathcal{E}^S, \quad \mathcal{F}^{\mathcal{M}} = \lambda^2 \mathcal{F}^S, \quad \mathcal{G}^{\mathcal{M}} = \lambda^2 \mathcal{G}^S \quad \text{auf } U, \quad (4.30)$$

**Beweis.** Zuerst behaupten wir die Existenz von Parametrisierungen  $X : U \rightarrow S, Y : U \rightarrow \mathcal{M}$ . Da der Beweis dieselben Argumente wie der Beweis des Satzes 4.10 benutzt, lassen sich die Formeln (4.13)-(4.16) und (4.17) hier verwenden.

Lass uns beweisen dass die Abbildung (4.13) lokal konform ist. Wegen der Gleichungen (4.16), (4.17), die für lokal konforme Abbildung gelten, und wegen Voraussetzung (4.30) erhalten wir, statt (4.18), die Gleichung

$$|d\varphi_p(w)|^2 = \lambda^2(p)|w|^2, \quad (4.31)$$

welche die behauptete lokal Konformität beweist.

Nehmen wir an,  $\varphi : S \rightarrow \mathcal{M}$  sei eine lokale Isometrie und  $X : U \rightarrow S$  eine Parametrisierung. Dann ist  $Y := \varphi \circ X : U \rightarrow \mathcal{M}$  eine entsprechende Parametrisierung von  $\mathcal{M}$  und es gilt  $Y_u = d\varphi_p(X_u), Y_v = d\varphi_p(X_v)$ . Andererseits gilt gemäß Behauptung:

$$\lambda^2 w \cdot \theta = d\varphi_p(w) \cdot d\varphi_p(\theta) \quad \forall w, \theta \in \mathcal{T}_p S.$$

Damit werden auch die Koeffizienten der ersten Fundamentalformen proportional

$$\lambda^2 \mathcal{E}^S = \lambda^2 X_u \cdot X_v = d\varphi_p(X_u) \cdot d\varphi_p(X_v) = Y_u \cdot Y_v = \mathcal{E}^{\mathcal{M}}$$

und ähnlich folgen die zwei weiteren Gleichungen in (4.31). ■

**Satz 4.21** *Auf jeder regulären Fläche existiert eine lokal isotherme Parametrisierung*

$$\mathcal{E} = \lambda^2, \quad \mathcal{F} = 0, \quad \mathcal{G} = \lambda^2. \quad (4.32)$$

*Damit ist jede reguläre Fläche lokal konform zur Ebene.*

*Folglich ist jedes Paar von regulären Flächen lokal konform.*

**Ohne Beweis.** ■

Für die Minimalfläche ist der Beweis relativ einfach.

**Beispiel 4.22** *Es sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen. Betrachte  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\varphi(x, y) = (u(x, y), v(x, y))^\top$ , wobei  $\varphi$  holomorph sei, d.h. es gelten die CR-Differentialgleichungen*

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

Mit  $N = \{(x, y)^\top \in U : \lambda^2 := u_x^2 + u_y^2 = 0\}$  ist

$$\varphi : U \setminus N \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (4.33)$$

eine lokal konforme Abbildung, weil

$$\begin{aligned} |(u, v)_x|^2 &= u_x^2 + v_x^2 = u_x^2 + u_y^2 =: \lambda^2, \\ |(u, v)_y|^2 &= u_y^2 + v_y^2 = u_y^2 + u_x^2 = \lambda^2, \\ (u, v)_x \cdot (u, v)_y &= u_x u_y + v_x v_y = u_x u_y - u_y u_x \equiv 0. \end{aligned}$$

**Beispiel 4.23** *Wir betrachten die folgende Parametrisierung der Einheitskugel*

$$X : U \rightarrow \mathbb{S}^2 \quad X(\theta, \varphi) = (\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \cos \theta)^\top, \quad (4.34)$$

wobei

$$U = (0, \pi) \times [0, 2\pi), \quad \mathbb{S}^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}.$$

Setze  $v = \log \tan \frac{\theta}{2}$  und  $u = \varphi$ . Dann ist

$$e^v = \tan \frac{\theta}{2}, \quad e^{-v} = \cot \frac{\theta}{2},$$

$$\sin \theta = 2 \tan \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{\tan^2 \frac{\theta}{2} + 1} = \frac{2}{e^v + e^{-v}} = \frac{1}{\cosh v}$$

$$\cos \theta = \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} = -\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} = -\tanh v$$

und daher

$$Y(u, v) := X(\theta(v), \varphi(u)) = \left( \frac{\sin u}{\cosh v}, \frac{\cos u}{\cosh v}, -\tanh v \right)^\top. \quad (4.35)$$

Für die Koeffizienten der ersten Fundamentalform erhält man

$$\mathcal{E} = \mathcal{G} = \left( \frac{1}{\cosh v} \right)^2, \quad \mathcal{F} = 0. \quad (4.36)$$

Also liegt eine isotherme Parametrisierung vor und

$$Y^{-1} : S^2 \setminus \{(0, 0, \pm 1)^\top\} \rightarrow Y^{-1}(S^2) = [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \quad (4.37)$$

ist eine konforme Abbildung von der Einheitssphäre ohne Nord- und Süd-polen zu Streife auf Ebene. Diese winkeltreue Abbildung bildet die Meridiane  $\varphi = \text{const.}$  und die Breitenkreise  $\theta = \text{const.}$  auf entsprechende Geraden  $u = \text{const}$  und  $v = \text{const}$  auf die Ebene  $(u, v)^\top$  ab (vgl. Fig. 4.4)). Die Abbildung heißt Mercator – Projektion (Weltkarte, 1569).

### 4.3 DIE PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DER FLÄCHENTHEORIE

Sei  $S \subset \mathbb{R}^3$  eine reguläre eingebettete Fläche, und

$$X : U \rightarrow S, \quad U \subset \mathbb{R}^2,$$

eine lokale Parametrisierung die mit der Orientierung von  $S$  verträglich sei, dann lautet das begleitende Dreibein an der Stelle  $(u, v) \in U$  mit  $X(u, v) = p$

$$X(U) \ni p \rightarrow \{X_u, X_v, N\}, \quad N := X_u \times X_v.$$

Analog zu den Frenet'schen Formeln (2.16), sind die Vektoren  $X_{uu}, \dots, X_{vv}$  darstellbar in der Basis  $\{X_u, X_v, N\}$ . Wir machen also den Ansatz:

$$\begin{cases} X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + b_{11} N, \\ \begin{cases} X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + b_{12} N, \\ X_{vu} = \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + b_{21} N, \end{cases} \\ X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + b_{22} N, \end{cases} \quad (4.38)$$

wobei, wegen der Orthogonalität  $N \perp X_u, N \perp X_v$  gilt

$$\begin{aligned} b_{11} &= X_{uu} \cdot N = -X_u \cdot N_u = \mathcal{L}, \\ b_{12} = b_{21} &= X_{uv} \cdot N = -X_u \cdot N_v = X_v \cdot N_u = \mathcal{M}, \\ b_{22} &= X_{vv} \cdot N = -X_v \cdot N_v = \mathcal{N}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Die zweite und dritte Gleichung in (4.38) sind gleich da  $X_{uv} = X_{vu}$ ; denn  $b_{12} = b_{21}$  (vgl. (4.39)) und  $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1, \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$  (vgl. (4.46) später).

Wir verwenden die Weingarten Gleichungen

$$N_{u^\alpha} = -b_\alpha^\beta X_{u^\beta} \quad \text{mit} \quad b_\alpha^\beta = b_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta}, \quad B_X = [b_{\alpha\beta}], \quad G_X^{-1} = [g^{\alpha\beta}] \quad (4.40)$$

(vgl. (3.112)) wobei  $G_X^{-1}$  die inverse zu die Matrix der I Fundamentalform,  $B_X$  – die Matrix der II Fundamentalform und  $S_X = B_X G_X^{-1} = [b_\beta^\alpha]$  die Weingarten Matrix sind (vgl. (3.110)).

Die Gleichungen (4.38) schreibt man kürzer:

$$X_{u^\alpha u^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma X_{u^\gamma} + b_{\alpha\beta} N. \quad (4.41)$$

Die Gauß (4.38) und die Weingarten (4.40) Gleichungen können wir zusammen in Matrixform darstellen (vgl. mit Frenet'schen Formeln (2.16))

$$\partial_{u^\alpha} \begin{bmatrix} X_{u^1} \\ X_{u^2} \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{\alpha 1}^1 & \Gamma_{\alpha 1}^2 & b_{\alpha 1} \\ \Gamma_{\alpha 2}^1 & \Gamma_{\alpha 2}^2 & b_{\alpha 2} \\ -b_\alpha^1 & -b_\alpha^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{u^1} \\ X_{u^2} \\ N \end{bmatrix}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (4.42)$$

Die Koeffizienten  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  heißen Christoffel Symbole der zweiten Art, und die Funktionen

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} := g_{\beta\sigma} \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma \quad (4.43)$$

nennt man Christoffel Symbole der ersten Art. Aus (4.43) folgt

$$g^{\beta\omega} \Gamma_{\alpha\omega\gamma} = g^{\beta\omega} g_{\omega\sigma} \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma = \delta_{\beta\sigma} \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma = \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta, \quad (4.44)$$

da  $g^{\beta\omega}g_{\omega\sigma} = \delta_{\beta\sigma}$ , wobei  $\delta_{\beta\sigma}$  der Kronecker-Symbol bezeichne, also  $\delta_{\beta\beta} = 1$ ,  $\delta_{\beta\sigma} = 0$  für  $\beta \neq \sigma$ .

Die Gleichungen (4.38) bzw. (4.44) heißen Gauß'sche Darstellungsformeln (der zweiten Ableitungen).

Als nächstes berechnen wir die Christoffel-Symbole: Aus (4.41) folgt mit (4.43):

$$X_{u^\alpha u^\beta} \cdot X_{u^\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma X_{u^\sigma} \cdot X_{u^\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma g_{\sigma\gamma} = \Gamma_{\alpha\gamma\beta}. \quad (4.45)$$

Wir erhalten daraus die Symmetrien

$$\Gamma_{\alpha\gamma\beta} = \Gamma_{\beta\gamma\alpha} \quad \text{und mit (4.44)} \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma. \quad (4.46)$$

Nun folgen aus

$$g_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{\partial}{\partial u^\gamma} g_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial u^\gamma} [X_{u^\alpha} \cdot X_{u^\beta}] = X_{u^\alpha u^\gamma} \cdot X_{u^\beta} + X_{u^\alpha} \cdot X_{u^\beta u^\gamma} \quad (4.47)$$

und aus (4.45), (4.43) die Gleichungen

$$g_{\alpha\beta,\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\alpha\gamma} = g_{\beta\sigma} \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma + g_{\alpha\sigma} \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma \quad (4.48)$$

Damit ergibt sich zusammen mit (4.46)

$$-g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\beta} + g_{\beta\gamma,\alpha} = 2\Gamma_{\alpha\gamma\beta}$$

und somit, zusammen mit (4.44)

$$\Gamma_{\alpha\gamma\beta} = \frac{1}{2} [g_{\alpha\gamma,\beta} + g_{\beta\gamma,\alpha} - g_{\alpha\beta,\gamma}], \quad (4.49)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{g^{\gamma\omega}}{2} [g_{\alpha\omega,\beta} + g_{\beta\omega,\alpha} - g_{\alpha\beta,\omega}]. \quad (4.50)$$

Nun folgt aus Formeln (4.49), (4.50) und Satz 4.10 unmittelbar die folgende.

**Korollar 4.24** Die Christoffel-Symbole (erster und zweiter Art) lassen sich allein aus den Koeffizienten der ersten Fundamentalform und deren Ableitungen berechnen.

*Insbesondere: Alle geometrischen Größen und Eigenschaften, die sich durch die Christoffel-Symbole beschreiben lassen, sind invariant unter Isometrien.*

Mit  $(u, v)$  und  $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$  lassen sich die Gleichungen (4.45) schreiben als

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{111} &= X_{uu} \cdot X_u = \frac{1}{2} \partial_u (X_u \cdot X_u) = \frac{1}{2} \mathcal{E}_u, \\
 \Gamma_{121} &= X_{uv} \cdot X_v = \partial_u (X_u \cdot X_v) - \frac{1}{2} \partial_v (X_u \cdot X_u) = \mathcal{F}_u - \frac{1}{2} \mathcal{E}_v, \\
 \Gamma_{112} &= X_{uv} \cdot X_u = \frac{1}{2} \partial_v (X_u \cdot X_u) = \frac{1}{2} \mathcal{F}_v = \Gamma_{211}, \\
 \Gamma_{221} &= X_{vu} \cdot X_v = \frac{1}{2} \partial_u (X_v \cdot X_v) = \frac{1}{2} \mathcal{G}_u = \Gamma_{122}, \\
 \Gamma_{212} &= X_{vv} \cdot X_u = \partial_v (X_u \cdot X_v) - \frac{1}{2} \partial_u (X_v \cdot X_v) = \mathcal{F}_v - \frac{1}{2} \mathcal{G}_u, \\
 \Gamma_{222} &= X_{vv} \cdot X_v = \frac{1}{2} \partial_v (X_v \cdot X_v) = \frac{1}{2} \mathcal{G}_v.
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

**Beispiel 4.25** Für die Rotationsfläche

$$X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))^T, \quad f(v) \neq 0$$

gilt

$$\mathcal{E} = f^2(v), \quad \mathcal{F} \equiv 0, \quad \mathcal{G} = [f'(v)]^2 + [g'(v)]^2. \tag{4.52}$$

Daraus folgt  $\mathcal{E}_u = 0$ ,  $\mathcal{F}_u = \mathcal{F}_v = 0$ ,  $\mathcal{G}_u = 0$ , sowie

$$\mathcal{E}_v = 2ff' \quad \text{und} \quad \mathcal{G}_v = 2[f'f'' + g'g'']. \tag{4.53}$$

Mit (4.51) ergeben sich die Christoffel Symbole zu:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{112} &= \Gamma_{211} = -\Gamma_{121} = ff', & \Gamma_{222} &= f'f'' + g'g'', \\
 \Gamma_{111} &= \Gamma_{221} = \Gamma_{122} = \Gamma_{212} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

Da

$$G_X = \begin{bmatrix} f^2 & 0 \\ 0 & [f']^2 + [g']^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{G} \end{bmatrix}, \quad G_X^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathcal{G}^{-1} \end{bmatrix} \tag{4.55}$$

(vgl. (3.134)) erhalten wir

$$g^{11} = \mathcal{E}^{-1} = f^{-2}, \quad g^{12} = g^{21} = 0, \quad g^{22} = \mathcal{G}^{-1} = \frac{1}{[f']^2 + [g']^2}. \tag{4.56}$$

Mit (4.44) und (4.54) folgt:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= g^{11}\Gamma_{111} + g^{12}\Gamma_{121} = 0, \\
\Gamma_{11}^2 &= g^{21}\Gamma_{111} + g^{22}\Gamma_{121} = \frac{-ff'}{[f']^2 + [g']^2}, \\
\Gamma_{12}^1 &= g^{11}\Gamma_{112} + g^{12}\Gamma_{122} = \frac{ff'}{f^2} = \frac{f'}{f}, \\
\Gamma_{12}^2 &= g^{21}\Gamma_{112} + g^{22}\Gamma_{122} = 0, \\
\Gamma_{22}^1 &= g^{11}\Gamma_{212} + g^{12}\Gamma_{222} = 0, \\
\Gamma_{22}^2 &= g^{21}\Gamma_{212} + g^{22}\Gamma_{222} = \frac{f'f'' + g'g''}{[f']^2 + [g']^2}.
\end{aligned} \tag{4.57}$$

**Beispiel 4.26** Für die isotherme Parametrisierung

$$\mathcal{E} = \mathcal{G} = \lambda^2, \quad \mathcal{F} = 0 \quad \implies \quad g^{12} = 0 = g^{21}, \quad g^{11} = \lambda^{-2} = g^{22}$$

mit (4.51) und (4.44) folgt:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{111} &= \lambda\lambda_u, & \Gamma_{121} &= -\lambda\lambda_v, & \Gamma_{112} &= \lambda\lambda_v, \\
\Gamma_{221} &= \Gamma_{122} = \lambda\lambda_v, & \Gamma_{212} &= -\lambda\lambda_v, & \Gamma_{222} &= \lambda\lambda_v, \\
\Gamma_{11}^1 &= \frac{\lambda_u}{\lambda} = \frac{\partial}{\partial u} \log \lambda = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1, \\
\Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{11}^2 = \frac{\lambda_v}{\lambda} = \frac{\partial}{\partial v} \log \lambda.
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Differentiation der Gauß'sche Darstellungsformel nach  $u^\alpha$

$$X_{,\beta\gamma} = \Gamma_{\beta\gamma}^\omega X_{,\omega} + b_{\beta\gamma} N \tag{4.59}$$

(vgl. (4.41)) ergibt:

$$X_{,\beta\gamma\alpha} = \left\{ \Gamma_{\beta\gamma,\alpha}^\omega X_{,\omega} + \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma X_{,\sigma\alpha} + b_{\beta\gamma,\alpha} N + b_{\beta\gamma} N_{,\alpha} \right\}. \tag{4.60}$$

Mit  $X_{,\sigma\alpha} = \Gamma_{\sigma\alpha}^\omega X_{,\omega} + b_{\sigma\alpha} N$  (vgl. (4.59)) und  $N_{,\alpha} = -b_\alpha^\omega X_{,\omega}$  (vgl. (4.40)) folgt

$$X_{,\beta\gamma\alpha} = \left\{ \Gamma_{\beta\gamma,\alpha}^\omega + \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma \Gamma_{\sigma\alpha}^\omega - b_{\beta\gamma} b_\alpha^\omega \right\} X_{,\omega} + \left\{ \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma b_{\sigma\alpha} - b_{\beta\gamma,\alpha} \right\} N. \tag{4.61}$$

Wegen der Symmetrie der dritten Ableitungen gilt:  $X_{,\alpha\beta\gamma} = X_{,\beta\alpha\gamma} = X_{,\alpha\gamma\beta}$ . Betrachten wir also die Differenz  $X_{,\beta\gamma\alpha} - X_{,\alpha\gamma\beta} = 0$ , dann muss der Koeffizienten dem vor Vektor  $X_{,\omega}$  immer Null sein. Wir schließen mit (4.40), (4.46) dass

$$R_{\alpha\beta\gamma}^\omega := \Gamma_{\beta\gamma,\alpha}^\omega - \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^\omega + \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma \Gamma_{\sigma\alpha}^\omega - \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma \Gamma_{\sigma\beta}^\omega \tag{4.62}$$

$$= b_{\beta\gamma} b_\alpha^\omega - b_{\alpha\gamma} b_\beta^\omega = g^{\tau\omega} (b_{\beta\gamma} b_{\alpha\tau} - b_{\alpha\gamma} b_{\beta\tau}). \tag{4.63}$$

Analog gilt auch, dass der Koeffizient vor  $N$  verschwindet:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\sigma} b_{\sigma\alpha} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\sigma} b_{\sigma\beta} + b_{\beta\gamma,\alpha} - b_{\alpha\gamma,\beta} = 0. \quad (4.64)$$

Die Gleichungen (4.63) heißen **Gauß-Gleichungen** und (4.64) nennt man die **Codazzi-Mainardi-Gleichungen**. Zusammen sind sie äquivalent zu den **Verträglichkeitsbedingungen**

$$X_{,\beta\gamma\alpha} \equiv X_{,\alpha\gamma\beta}. \quad (4.65)$$

Die Codazzi-Mainardi-Gleichungen (4.64) sind trivial für  $\alpha = \beta$ , wiederholen sich für  $(\alpha, \beta) = (1, 2), (2, 1)$  und nur die folgenden Gleichungen sind essentiell:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_v - \mathcal{N}_u &= \Gamma_{22}^1 \mathcal{L} + (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) \mathcal{M} - \Gamma_{12}^2 \mathcal{N} && \text{für } (\alpha, \beta, \gamma) = (1, 2, 2), \\ \mathcal{L}_v - \mathcal{M}_u &= \Gamma_{12}^1 \mathcal{L} + (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) \mathcal{M} - \Gamma_{11}^2 \mathcal{N} && \text{für } (\alpha, \beta, \gamma) = (1, 2, 1). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Die Abbildung

$$R(U, V)W := R_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma} U^{\alpha} V^{\beta} W^{\gamma} X_{,\sigma}, \quad R : T_p S \times T_p S \times T_p S \rightarrow T_p S \quad (4.67)$$

für  $U = U^{\alpha} X_{,\alpha}$ ,  $V = V^{\beta} X_{,\beta}$  und  $W = W^{\gamma} X_{,\gamma}$  nennt man den **Riemannschen Krümmungstensor**.

Für  $Z = Z^{\sigma} X_{,\sigma}$  folgt mit (4.67) und (4.63)

$$(R(U, V)W, Z) = R_{\alpha\beta\gamma\sigma} U^{\alpha} V^{\beta} W^{\gamma} Z^{\sigma}, \quad (4.68)$$

wobei die Koeffizienten durch

$$R_{\alpha\beta\gamma\sigma} = g_{\sigma\omega} R_{\alpha\beta\gamma}^{\omega} = b_{\beta\gamma} b_{\alpha\sigma} - b_{\alpha\gamma} b_{\beta\sigma} \quad (4.69)$$

gegeben sind, denn  $g^{\beta\omega} g_{\omega\sigma} = \delta_{\beta\sigma}$ . Insbesondere folgt für die Gauß'sche Krümmung

$$K = \frac{\det[b_{\gamma\beta}]_{2 \times 2}}{\det[g_{\gamma\beta}]_{2 \times 2}} = \frac{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}$$

(vgl. (3.116))

$$K = -\frac{R_{1212}}{\det[g_{\gamma\beta}]_{2 \times 2}} = -\frac{R_{1212}}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}, \quad (4.70)$$

sowie

$$R_{1212} = R_{2121} = -R_{1221} = -R_{2112}, \quad (4.71)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\sigma} = 0 \quad \text{für alle Werten } (\alpha, \beta, \gamma, \sigma) \neq (1, 2, 1, 2), (2, 1, 2, 1), (1, 2, 2, 1), (2, 1, 1, 2).$$

Die Gleichungen

$$R_{1212} = g_{2\omega} R_{12\gamma}^{\omega} = g_{2\omega} [\Gamma_{2\gamma,1}^{\omega} - \Gamma_{1\gamma,2}^{\omega} + \Gamma_{21}^{\sigma} + \Gamma_{\sigma 1}^{\omega} - \Gamma_{11}^{\sigma} \Gamma_{\sigma 2}^{\omega}],$$

(vgl. (4.69) implizieren zusammen mit Korollar 4.24 das folgende.

**Korollar 4.27** Die Gauß'sche Krümmung  $K$ , die ursprünglich durch die erste und zweite Fundamentalformen definiert war, hängt tatsächlich nur von den Koeffizienten der ersten Fundamentalform sowie deren ersten und zweiten Ableitungen ab.

Da die erste Fundamentalform unten Isometrien der Fläche invariant ist (vgl. Satz 4.10), haben wir das folgende unbestritten wichtigste Ergebnis der Differentialgeometrie bewiesen:

**Theorem 4.28 (Theorema Egregium; C.F. Gauß, 1827).**

*Lateinisch: Disquisitiones generales circa superficies curvas.*

*Deutsch: Die Gauß'sche Krümmung einer Fläche ist invariant unter Isometrien.* ■

Wir wollen noch (für eine spätere Anwendung) die Identität (4.70) für die Gauß'sche Krümmung einer Fläche mit orthogonaler Parametrisierung herleiten: Mit  $\mathcal{F} = 0$  erhalten wir

$$G = [g_{\gamma\beta}]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{G} \end{bmatrix}$$

und daher

$$g_{11} = \mathcal{E}, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = \mathcal{G}.$$

Weiter folgt mit (4.43) und (4.51):

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{\Gamma_{111}}{g_{11}} = \frac{\mathcal{E}_u}{2\mathcal{E}}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{\Gamma_{122}}{g_{22}} = \frac{\mathcal{G}_u}{2\mathcal{G}} = \Gamma_{21}^2, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{\Gamma_{121}}{g_{22}} = -\frac{\mathcal{E}_v}{2\mathcal{G}}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{\Gamma_{212}}{g_{11}} = -\frac{\mathcal{G}_u}{2\mathcal{E}}, & \Gamma_{12}^1 &= \frac{\Gamma_{112}}{g_{11}} = \frac{\mathcal{E}_v}{2\mathcal{E}} = \Gamma_{21}^1, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{\Gamma_{222}}{g_{22}} = \frac{\mathcal{G}_v}{2\mathcal{G}}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Mit

$$R_{1212} = g_{22}R_{121}^2 = \mathcal{G}R_{121}^2$$

(vgl. (4.69)) und aus den Gauß-Gleichungen (4.63) erhalten wir

$$\begin{aligned} K &= -\frac{R_{1212}}{\mathcal{E}\mathcal{G}} = -\frac{R_{121}^2}{\mathcal{E}} \\ &= -\frac{1}{\mathcal{E}} \left[ \Gamma_{21,u}^2 - \Gamma_{11,v}^2 + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 \right] \\ &= -\frac{1}{2\mathcal{E}} \left[ \left( \frac{\mathcal{G}_u}{\mathcal{G}} \right)_u + \left( \frac{\mathcal{E}_v}{\mathcal{G}} \right)_v - \frac{(\mathcal{E}_v)^2}{2\mathcal{E}\mathcal{G}} + \frac{(\mathcal{G}_u)^2}{2\mathcal{G}^2} - \frac{\mathcal{E}_u \mathcal{G}_u}{2\mathcal{E}\mathcal{G}} + \frac{\mathcal{E}_v \mathcal{G}_v}{2\mathcal{G}^2} \right] \end{aligned}$$

und, folglich, wird Gauß'sche Krümmung als "Divergenz" dargestellt (Stokes):

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\mathcal{G}_u}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\mathcal{E}_v}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}} \right) \right] = -\frac{1}{2\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}} \operatorname{div} \left( \frac{\mathcal{G}_u}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}}, \frac{\mathcal{E}_v}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}} \right)^\top. \quad (4.73)$$

Liegt sogar eine isotherme Parametrisierung vor, d.h.  $\mathcal{F} = 0$ ,  $\mathcal{E} = \mathcal{G} = \lambda^2 > 0$ , so folgt aus (4.73) leicht

$$K = -\frac{1}{2\lambda^2} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{2\lambda_u \lambda}{\lambda^2} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{2\lambda_v \lambda}{\lambda^2} \right) \right] = -\frac{\Delta \log \lambda}{\lambda^2}. \quad (4.74)$$

Für den Fall, dass die Koordinatenumgebung  $X(U)$  keine Nabelpunkte enthält und die Koordinatenkurven die Krümmungslinien sind:

$$\mathcal{F} = 0 = \mathcal{M}, \quad H = \frac{1}{2} \left[ \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{E}} + \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{G}} \right]$$

(vgl (3.119)), nehmen die Codazzi-Mainardi-Gleichungen (4.66) folgenden Form an:

$$\begin{cases} \mathcal{N}_u = \frac{1}{2} \mathcal{G}_v \left[ \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{E}} + \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{G}} \right] = \mathcal{G}_u H, \\ \mathcal{L}_v = \frac{1}{2} \mathcal{E}_v \left[ \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{E}} + \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{G}} \right] = \mathcal{E}_v H. \end{cases} \quad (4.75)$$

Außer den oben hergeleiteten Gauß sowie Codazzi-Mainardi Gleichungen gibt es keine weiteren Verträglichkeitsbedingungen; das ist der Inhalt des **Fundamentalsatzes der Flächentheorie**:

**Theorem 4.29 (O. Bonnet).** *Es seien  $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$  sowie  $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$  glatte Funktionen auf einer offenen Menge  $V \subset \mathbb{R}^2$  mit  $\mathcal{E} > 0, \mathcal{G} > 0$ .*

*Gilt außerdem  $\mathcal{W}^2 := \det G = \mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2 > 0$  und erfüllen die Funktionen formal die Gleichungen von Gauß und Codazzi-Mainardi, so gilt:*

*i. Zu jedem  $q \in V$  gibt es eine Umgebung  $q \in U \subset V$  und eine injektive Abbildung:*

$$X : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (4.76)$$

*so dass  $X(U)$  eine reguläre eingebettete Fläche ist, und  $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$  bzw.  $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$  die Koeffizienten der ersten bzw. zweiten Fundamentalform bzgl. der Parametrisierung  $X$  sind.*

*ii. Ist  $U$  zusammenhängend und  $\tilde{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine andere Parametrisierung, die denselben Bedingungen genügt (vgl. Abschnitt (i)), so gibt es eine eigentliche Bewegung  $A = T \circ \rho$  ( $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  Translation,  $\rho$  orthogonale Abbildung  $\rho \in SO(3)$ ), so dass gilt*

$$\tilde{X} = A \circ X.$$

*iii. Ist  $U$  zusammenhängend und sind die Anfangsbedingungen*

$$X(p_0) = q \in X(U), \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned} X_{,\alpha}(p_0) = X_\alpha^{(0)} \in T_{p_0}(\mathbb{R}^3), \quad \alpha = 1, 2, \quad N(p_0) = N^{(0)} \in \mathbb{R}^3, \\ |N^{(0)}| = 1, \quad N^{(0)} \perp X_\alpha^{(0)} \quad \alpha = 1, 2, \end{aligned} \quad (4.78)$$

erfüllt, sind  $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$  bzw.  $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$  die Koeffizienten der ersten bzw. zweiten Fundamentalform bzgl. der Parametrisierung  $X$ , so ist die Lösung (4.76) eindeutig.

**Bemerkungen zum Beweis** (vgl. Kühnel [Ku, § 3.4D] und do Carmo [Car, Anhang Kap. 4]). Wir suchen das Dreibein  $\{X_{u^1}, X_{u^2}, N\}$  das von  $u^1, u^2$  abhängt und dem System

$$\begin{cases} X_{u^1 u^1} = \Gamma_{11}^1 X_{u^1} + \Gamma_{11}^2 X_{u^2} + b_{11} N, \\ X_{u^1 u^2} = \Gamma_{12}^1 X_{u^1} + \Gamma_{12}^2 X_{u^2} + b_{12} N = X_{u^2 u^1}, \\ X_{u^2 u^2} = \Gamma_{22}^1 X_{u^1} + \Gamma_{22}^2 X_{u^2} + b_{22} N, \\ N_{u^1} = -b_1^1 X_{u^1} - b_1^2 X_{u^2}, \\ N_{u^2} = -b_2^1 X_{u^1} - b_2^2 X_{u^2} \end{cases} \quad (4.79)$$

(vgl. (4.38), (4.40)) genügt, wobei die Koeffizienten  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma, b_\alpha^\beta$  durch  $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$  und  $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$  bestimmt sind (vgl. (4.40)–(4.51)).

Die obigen  $5 \times 3 = 15$  skalar Gleichungen liefern ein System partieller Differentialgleichungen auf  $V \times \mathbb{R}^9$  mit unbekanntem  $Y, Z, N \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ , wobei  $Y = X_{u^1}, Z = X_{u^2}$ , also mit 9 unbekanntem skalaren Funktionen

$$\begin{cases} Y_{u^1} = \Gamma_{11}^1 Y + \Gamma_{11}^2 Z + b_{11} N, \\ Y_{u^2} = \Gamma_{12}^1 Y + \Gamma_{12}^2 Z + b_{12} N, \\ Z_{u^2} = \Gamma_{22}^1 Y + \Gamma_{22}^2 Z + b_{22} N, \\ N_{u^1} = -b_1^1 Y - b_1^2 Z, \\ N_{u^2} = -b_2^1 Y - b_2^2 Z, \end{cases} \quad (4.80)$$

Da 6 Gleichungen überflüssig sind, ist ein System des Typs (4.80) in allgemein nicht integrierbar. Aber nach dem Satz von Frobenius (Jahr 1877) hat das System (4.80) mit den Anfangsbedingungen (4.78) eine eindeutige Lösung falls die folgende Kompatibilitätsbedingungen erfüllt sind:

$$Y_{u^2} = Z_{u^1}, \quad Y_{u^1} = Z_{u^2}.$$

Diese 2 Gleichungen (6 Skalggleichungen) sind äquivalent zu Verträglichkeitsbedingungen  $X_{,\alpha\beta\gamma} = X_{,\beta\alpha\gamma} = X_{,\alpha\gamma\beta}$  und sind weiter äquivalent zu den Gauß (4.63) und Codazzi-Mainardi (4.64) Gleichungen, die wir verlangt haben.

Also, die Eindeutige Lösung von System (4.80) existiert und hat die Eigenschaften:

$$\begin{aligned} N \cdot N &= 1, & N \cdot Y &= N \cdot Z = 0, \\ Y \cdot Y &= \mathcal{E}, & Y \cdot Z &= \mathcal{F}, & Z \cdot Z &= \mathcal{G}. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Um die Eigenschaften (4.81) zu sichern, leiten wir die Gleichung (4.81) ab und verwenden (4.79) (oder äquivalente (4.80)) die Ableitungen wieder über derselbe 6 Größen von

(4.81) auszudrücken. So erhalten wir ein System von 12 partiellen Differenzialgleichungen (bezüglich  $(Y \cdot Y)_u, Y \cdot Y)_v, \dots, (Z \cdot Z)_v$ ) die aus (4.80) gewonnen werde. Da das System (4.80) bezüglich der Unbekannten  $Y = X_{u^1}, Z = X_{u^2}, N$  mit den Anfangsbedingungen (4.81) eindeutig bestimmt sind, besitzt die Lösung die Eigenschaften (4.81) automatisch. Anschließend berechnet man mit (4.81) und mit (4.79) die Koeffizienten  $N \cdot X_{u^1 u^1}, N \cdot X_{u^1 u^2}$  und  $N \cdot X_{u^2 u^2}$  von zweite Fundamentalform und überzeugt sich das diese genau  $\mathcal{L}, \mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  sind.

Nun untersuchen wir das System

$$X_{u^1} := \frac{\partial X}{\partial u^1} = Y, \quad X_{u^2} := \frac{\partial X}{\partial u^2} = Z \quad (4.82)$$

mit der Anfangsbedingung (4.77). Dieses System ist integrierbar, wegen der Symmetrie  $Y_{u^2} = Z_{u^1}$ . Die Lösung  $X(u^1, u^2)$ , die wir gewinnen, besitzt  $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$  und  $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$  als Koeffizienten der ersten und zweiten Fundamentalform (vgl. (4.81)).

Wenn die Anfangsbedingungen (4.78) fehlen und zwei Lösungen  $X(u^1, u^2), \tilde{X}(u^1, u^2)$  existieren, dann sind die Koeffizienten der Fundamentalformen dieser Lösungen gleich und die entsprechenden Flächen sind zueinander isometrisch mit gleicher Orientierung. Dann ist die entsprechende lineare Abbildung

$$A(u) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad A(u)X_{u^k}(u) = \tilde{X}_{u^k}(u), \quad A(u)N(u)|_u = \tilde{N}(u)$$

korrekt definiert für alle  $u = (u^1, u^2)^\top \in U \subset \mathbb{R}^2$  und orthogonal  $A(u) \in SO(3)$ , weil

$$A(u)X_{u^k} \cdot A(u)X_{u^k} = \tilde{X}_{u^k} \cdot \tilde{X}_{u^k} = X_{u^k} \cdot X_{u^k}, \quad A(u)N \cdot A(u)N = \tilde{N} \cdot \tilde{N} = N \cdot N.$$

Es bleibt nur zu beweisen dass  $A(u) \equiv \text{const}$  (d.h. unabhängig von  $u \in U$ ).

Leiten wir die obigen Gleichungen nochmals ab:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{u^\alpha u^\beta} &= (AX_{u^\alpha})_{u^\beta} = A_{u^\beta} X_{u^\alpha} + AX_{u^\alpha u^\beta}, \\ \tilde{N}_{u^\alpha} &= (AN)_{u^\alpha} = A_{u^\alpha} N + AN_{u^\alpha}. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Wegen der Symmetrien  $\tilde{g}^{\alpha\beta} = g^{\beta\alpha}, \tilde{b}_\beta^\alpha = b_\alpha^\beta$  und  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma$ , folgt aus den Gauß und den Weingarten Gleichungen:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{u^\alpha u^\beta} &= \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma X_{u^\gamma} + \tilde{b}_{\alpha\beta}^\gamma \tilde{N} = AX_{u^\alpha u^\beta}, \\ \tilde{N}_{u^\alpha} &= \tilde{b}_\alpha^\beta \tilde{X}_{u^\beta} = b_\alpha^\beta AX_{u^\beta} = AN_{u^\alpha}. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Da  $\{X_{u^1}, X_{u^2}, N\}$  Dreibein (linear unabhängig) ist, von (4.83) und (4.84) folgt es  $A_{u^\alpha} = \frac{\partial A}{\partial u^\alpha} = 0$  für  $\alpha = 1, 2$  und  $A = \text{const}$ . ■

Als Anwendung des Theorema Egregium wollen wir nun folgendes Ergebnis beweisen:

**Satz 4.30** Die Sphäre ist die einzige reguläre abgeschlossene und kompakte Fläche in  $\mathbb{R}^3$  mit konstanter Gauß'scher Krümmung  $K$ .

Für den Beweis brauchen wir einige Hilfsätze, die wir zuerst beweisen.

**Lemma 4.31** Ist  $K > 0$  auf einer Fläche  $S$ , und hat  $\kappa_1$  ein lokales Maximum in  $p \in S$ ,  $\kappa_2$  ein lokales Minimum in  $p$ , so ist  $p$  ein Nabelpunkt:  $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$ .

**Beweis:** Sei  $\kappa_1(p) > \kappa_2(p)$ . Wir verwenden ohne Beweis die folgende Tatsache (technischer Natur):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Da } p \text{ kein Nabelpunkt ist, können wir neue Koordinaten einführen,} \\ \text{so dass die Koordinatenkurven } u = \text{const bzw. } v = \text{const die} \\ \text{Krümmungslinien sind (} u \leftrightarrow \kappa_1, v \leftrightarrow \kappa_2 \text{).} \end{array} \right\}$$

Die Verträglichkeitsbedingungen lauten wie in (4.75) und es gilt

$$\mathcal{L} = \kappa_1 \mathcal{E}, \quad N = \kappa_2 \mathcal{G}. \quad (4.85)$$

Aus (4.85) folgt

$$\mathcal{L}_v = \mathcal{E}_v \kappa_1 + \mathcal{E}(\kappa_1)_v, \quad N_u = \mathcal{G}_u \kappa_2 + \mathcal{G}(\kappa_2)_u. \quad (4.86)$$

$\mathcal{L}_v$  und  $N_u$  eingesetzt in Codazzi-Mainardi-Gleichungen (4.75) ergeben zusammen mit (4.85)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}_u = \frac{2\mathcal{G}}{\kappa_1 - \kappa_2}(\kappa_2)_u, \\ \mathcal{E}_v = \frac{2\mathcal{E}}{\kappa_1 - \kappa_2}(\kappa_1)_v. \end{array} \right. \quad (4.87)$$

Mit (4.87) und (4.73) erhält man:

$$-2\mathcal{E}\mathcal{G}K = \frac{2\mathcal{G}}{\kappa_1 - \kappa_2}(\kappa_2)_{uu} - \frac{2\mathcal{E}}{\kappa_1 - \kappa_2}(\kappa_1)_{vv}, \quad (4.88)$$

$$+ f_1(u, v)(\kappa_2)_u + f_2(u, v)(\kappa_1)_v. \quad (4.89)$$

Hierbei sind  $f_1, f_2$  beschränkte Funktionen. Da  $K > 0$  vorausgesetzt ist, ist die linke Seite von (4.88) negativ. Dort, wo  $\kappa_1$  sein Maximum und  $\kappa_2$  sein Minimum annimmt, muß natürlich gelten

$$(\kappa_1)_v = (\kappa_2)_u = 0, \quad (\kappa_1)_{vv} \leq 0, \quad (\kappa_2)_{uu} \geq 0.$$

Unsere Annahme war  $\kappa_1 - \kappa_2 > 0$  in  $p$ , so dass die rechte Seite von (4.88) nicht negativ ist. Dies ist ein Widerspruch und damit die Behauptung ist bewiesen. ■

**Satz 4.32 (S. Chern, 1945).** *Es sei  $S \subset \mathbb{R}^3$  eine geschlossene, reguläre Fläche mit positiver Gauß'scher Krümmung. Für die Hauptkrümmungen  $\kappa_1, \kappa_2$  gelte  $\kappa_1 \geq \kappa_2$  sowie*

$$\kappa_2 = f(\kappa_1),$$

wobei  $f$  monoton fallend ist. Dann ist  $S$  eine Kugel.

**Beweis:** Da  $S$  kompakt ist, nimmt  $\kappa_1$  in einem gewissen Punkt  $p$  sein Maximum an und wegen  $\kappa_2 = f(\kappa_1)$  nimmt  $\kappa_2$  in  $p$  sein Minimum an. Dann gilt mit Lemma 4.31  $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$ .

Andererseits haben wir

$$\kappa_1(p) \geq \kappa_1(q) \geq \kappa_2(q) \geq \kappa_2(p) = \kappa_1(p)$$

für beliebiges  $q \in S$ . Mit anderen Worten: Jeder Punkt auf  $S$  ist ein Nabelpunkt. Deshalb ist  $S$  eine Kugel (vgl. Satz 3.51). ■

**Korollar 4.33** *Sind  $S$  und  $\tilde{S}$  reguläre Flächen, isometrisch zueinander, und ist  $S$  eine Kugel, so ist auch  $\tilde{S}$  eine Kugel (mit demselben Radius).*

**Beweis:** Ist  $S$  eine Kugel, dann gilt  $K_S \equiv c > 0$ ; ist  $\tilde{S}$  isometrisch zu  $S$  und daher  $K_{\tilde{S}} = K_S = c > 0$ . Nun ist  $K = c = \kappa_1 \kappa_2$ , also  $\kappa_2 = \frac{c}{\kappa_1}$  und der Satz 4.32 von Chern ist anwendbar. ■

**Korollar 4.34** *Ist  $S$  eine geschlossene reguläre Fläche positiver Gauß'scher Krümmung. Hat  $S$  eine konstante mittlere Krümmung, so ist  $S$  eine Kugel.*

**Beweis:** Aus  $2H = \kappa_1 + \kappa_2 \equiv c$  folgt  $\kappa_2 = c - \kappa_1$  und der Satz 4.32 von Chern ist anwendbar. ■

**Beweis des Satzes 4.30:** Offenbar muß  $K = \kappa_1 \kappa_2 > 0$  sein, da es keine geschlossenen Flächen in  $\mathbb{R}^3$  mit  $K = 0$  oder  $K < 0$  in allen Punkten gibt.

In der Tat: Es sei  $B_R(0) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq R\}$  ein Kugel in  $\mathbb{R}^3$  mit Radius  $R$ . Weiter sei  $S \subset \overline{B_R(0)}$  und  $R_0 = \inf \{\tilde{R} > 0 : S \subset \overline{B_{\tilde{R}(0)}}\}$ . Dann berühren sich  $S$  und  $S_0 := \partial B_{R_0}(0)$  in mindestens einem Punkt  $p \in S \cap S_0$  und es gilt  $T_p S = T_p S_0$ .  $S$  liegt ganz auf einer Seite der Tangentialebene an  $S$  in  $p$ . Die Fläche  $S$  berührt die Tangentialebene nur in  $p$ . Also ist  $p$  kein hyperbolischer oder parabolischer Punkt von  $S$  (sonst würde die Fläche auf beiden Seiten der Tangentialfläche liegen). D.h.  $K(p) \geq 0$ . Dass tatsächlich  $K(p) > 0$  gilt, folgt aus der Betrachtung der Normalschnitte. Ein Schnitt mit  $S_0$  hat Normalkrümmung  $\frac{1}{R_0}$ , weil der

Schnitt mit  $S$  eine Normalkrümmung  $\geq \frac{1}{R_0}$  hat.

Jetzt folgt der Beweis des Satzes 4.30 wie in Korollar 4.33:  $\kappa_1 \kappa_2 = K = \text{const} > 0$ . Nun ist  $\kappa_2 = \frac{K}{\kappa_1}$  fallend und der Satz 4.32 von Chern ist anwendbar. ■

## 4.4 DIE KOVARIANTE ABLEITUNGEN

Im folgenden sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine reguläre glatte Fläche.

Für Innere geometrie sind nur Tangentiale Vektorfelder  $V$  interessant. Die Ableitungen  $\partial_{u^1}V$  und  $\partial_{u^2}V$  könnten aber nicht tangential sein.

Es sei  $\mathcal{V}(X)$  die Menge der tangentialen Vektorfelder

$$V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

d.h. für  $w \in \Omega$  ist  $V(w) \in T_wX$ .

Jedes  $V \in \mathcal{V}(X)$  kann geschrieben werden als

$$V(w) = V^1(w)X_{u^1}(w) + V^2(w)X_{u^2}(w) = V^\alpha(w)X_{,\alpha}(w) \quad (4.90)$$

für  $w \in \Omega$ , wobei  $V^1, V^2 \in \mathbb{C}^\infty(\Omega)$  glatte Funktionen sind. Also, mit  $\mathfrak{F}(X) := \mathbb{C}^\infty(\Omega)$  ist  $\mathcal{V}(X)$  ein  $\mathfrak{F}(X)$ -Modul, d.h. sind  $f, g \in \mathfrak{F}(X)$  und  $V, W \in \mathcal{V}(X)$ , so ist

$$fV + gW \in \mathcal{V}(X),$$

wobei natürlich

$$(fV + gW)(w) := f(w)V(w) + g(w)W(w).$$

Ist nun  $U = U^\alpha X_{,\alpha} \in \mathcal{V}(X)$  gegeben, so definieren wir einen Differentialoperator  $L_U := U_\alpha \partial_\alpha$  auf  $\mathfrak{F}(X)$  durch

$$(L_U f)(w) := U_\alpha(w) \partial_\alpha f(w) = U_\alpha(w) f_{,\alpha}(w) \quad (4.91)$$

Den Differentialoperator  $L_U$  definiert man auch auf tangentialen Vektorfeldern  $V \in \mathcal{V}(X)$ ,  $V = V^\beta X_{,\beta}$  durch

$$\begin{aligned} (L_U V)(w) &:= (U^\alpha \partial_\alpha (V^\beta X_{,\beta})) (w) \\ &= U^\alpha(w) V^\beta(w) X_{,\alpha\beta}(w) + U^\alpha(w) V_{,\alpha}^\beta(w) X_{,\beta}(w). \end{aligned} \quad (4.92)$$

Hier gibt es ein anderes Problem: Die Gauß'schen Formeln (4.41) liefern

$$L_U V = [U^\alpha V_{,\alpha}^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma U^\alpha V^\beta] X_{,\gamma} + b_{\alpha\beta} U^\alpha V^\beta N. \quad (4.93)$$

Da der letzte Summand den Normalenvektor  $N$  enthält, ist  $L_U V$  kein tangentiales Vektorfeld mehr.

Für  $w \in \Omega$  sei nun  $P = P(w) : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_wX$  die **orthogonale Projektion** auf den Tangentialraum  $T_wX$  von  $X$  in  $w$ :

$$P(w)[U^\alpha(w)X_{,\alpha} + b(w)N] := U^\alpha(w)X_{,\alpha}, \quad U = U^\alpha X_{,\alpha} \in \mathcal{V}(X). \quad (4.94)$$

Wir definieren nun eine Abbildung

$$D : \mathcal{V}(X) \times \mathcal{V}(X) \rightarrow \mathcal{V}(X), \quad (4.95)$$

durch

$$D_U V(w) := P(w)[(L_U V)(w)] = [U^\alpha V_{,\alpha}^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma U^\alpha V^\beta] X_{,\gamma}, \quad w \in \Omega \quad (4.96)$$

(vgl. (4.93)), wobei  $U = U^\alpha X_{,\alpha} \in \mathcal{V}(X)$ ,  $V = V^\beta X_{,\beta} \in \mathcal{V}(X)$ . Insbesondere folgt

$$D_{X_{,\alpha}} X_{,\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma X_{,\gamma}. \quad (4.97)$$

Aus (4.93) und (4.96) folgt

$$L_U V = D_U V + b_{\alpha\beta} U^\alpha V^\beta N = D_U V + II(U, V) N, \quad (4.98)$$

wobei  $II(U, V)$  die zweite Fundamentalform.

**Definition 4.35** Die Abbildung  $D$  in (4.95), die jedem Paar  $(U, V)$  von tangentialen Vektorfeldern aus  $\mathcal{V}(X)$  ein weiteres tangentiales Vektorfeld  $D_U V \in \mathcal{V}(X)$  zuordnet, heißt **Kovariante Ableitung auf der Fläche  $X$** .

**Lemma 4.36** Die kovariante Ableitung  $D_U$  hängt nur von der ersten Fundamentalform ab und ist invariant unten Isometrien zwischen Flächen.

**Beweis:** Das folgt unmittelbar aus der Definitionsformel (4.96) und Korollar 4.24. ■

**Lemma 4.37** Die kovariante Ableitung erfüllt die drei Regeln des Zusammenhangs:

$$\begin{aligned} \text{K.1.} \quad & D_U[\alpha V + \beta W] = \alpha D_U V + \beta D_U W, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \\ \text{K.2.} \quad & D_{fU+gV} W = f D_U W + g D_V W, \quad f, g \in \mathfrak{F}(X), \\ \text{K.3.} \quad & D_U[fV] = (L_U f)V + f D_U V, \quad f \in \mathfrak{F}(X), \end{aligned} \quad (4.99)$$

für beliebige tangentialvektorfelder  $U, V, W \in \mathcal{V}(X)$ .

**K.4.** Für das Skalarprodukt auf  $T_w X$  (d.h. für die erste Fundamentalform) gilt eine Produktregel:

$$L_U(V, W) = (D_U V, W) + (V, D_U W), \quad U, W \in \mathcal{V}(X). \quad (4.100)$$

**Beweis:** So folgt z.B., K.3 direkt aus der Definition von  $D$  und der Produktregel für  $L_U$ :

$$D_U[fV] = P[L_U(fV)] = P[(L_U f)V + f L_U V] = (L_U f)V + f P L_U V = (L_U f)V + f D_U V,$$

da  $PV = V$  und  $P$  linear ist. Um (4.100) zu beweisen wenden wir (4.98) an:

$$\begin{aligned}
 L_U(V, W) &= (L_U V, W) + (V, L_U W) \\
 &\stackrel{(4.98)}{=} (D_U V + b_{\alpha\beta} U^\alpha V^\beta N, W) + (V, D_U W + b_{\alpha\beta} U^\alpha W^\beta N) \\
 &= (D_U V, W) + b_{\alpha\beta} U^\alpha V^\beta (N, W) + (V, D_U W) + b_{\alpha\beta} U^\alpha W^\beta (V, N) \\
 &= (D_U V, W) + (V, D_U W)
 \end{aligned}$$

denn  $U = U^\alpha X_{,\alpha}$ ,  $W = W^\alpha X_{,\alpha}$ ,  $V, W \in \mathcal{V}(X)$  und somit  $(N, W) = (V, N) = 0$ . ■

**Definition 4.38** Der **Kommutator** zweier Vektorfelder  $U, V \in \mathcal{V}(X)$  (**Lie Klammern, Lie Ableitung**) ist als die Abbildung

$$\begin{aligned}
 [U, V] &:= D_U V - D_V U = L_U V - L_V U = [U^\alpha V_{,\alpha}^\beta - V^\alpha U_{,\alpha}^\beta] X_{,\beta}, \\
 [\cdot, \cdot] &: \mathcal{V}(X) \times \mathcal{V}(X) \rightarrow \mathcal{V}(X)
 \end{aligned} \tag{4.101}$$

definiert.

Es gilt offenbar

$$D_U V = D_V U + [U, V] \tag{4.102}$$

und für den Riemannschen Krümmungstensor verifiziert man:

$$\begin{aligned}
 R(U, V)W &= D_U D_V W - D_V D_U W - D_{[U, V]} W \\
 &= [D_U, D_V] W - D_{[U, V]} W,
 \end{aligned} \tag{4.103}$$

wobei, analog zu (4.101),

$$[D_U, D_V] := D_U D_V - D_V D_U \tag{4.104}$$

den Kommutator der Operatoren  $D_U$  und  $D_V$  bezeichnet.

#### 4.5 GÜNTER'SCHE UND STOKE'SCHE ABLEITUNGEN

Das Vektorfeld  $U \in \mathcal{V}(X)$  können wir auch in kartesischen Koordinaten darstellen:

$$U = U^\alpha X_{,\alpha} = U_\gamma e^\gamma \in \mathcal{F}(X), \tag{4.105}$$

wobei  $\{e^1, e^2, e^3\}$  die kanonische Basis des  $\mathbb{R}^3$  darstellt (vgl. (1.29)),

Für Funktion  $f \in \mathbb{C}^1(\Omega_X)$  und die vektorfeld  $U = U^\alpha e_\alpha \in \mathbb{C}^1(\Omega_X)$ , die in der Umgebung  $\Omega_X \subset \mathbb{R}^3$  der Fläche  $X(\Omega)$  definiert sind, definiert man die **Richtungsableitung**:

$$(\nabla_U f)(w) := U^\alpha(w) \partial_\alpha f(w). \tag{4.106}$$

Nun ergibt sich folgendes Problem: Die Funktion  $f \in \mathfrak{F}(X)$  ist *nur auf der Fläche*  $\mathcal{S} = X(\Omega)$  definiert und es besteht kaum die Möglichkeit übliche Ableitungen  $\partial_j f = \frac{\partial}{\partial x_j} f$  zu berechnen, zumindest nicht für alle  $j = 1, 2, 3$ . Um zu sehen, dass (4.91) dennoch Sinn macht, suchen wir eine glatte Kurve  $c = (c^1, c^2, c^3)^\top : \mathbb{R} \supset [a, b] \rightarrow \mathcal{S} = X(\Omega)$  die  $U(w)$  als Tangentialvektor am Punkt  $w = c(t)$  hat, also  $\dot{c}(t) := \frac{dc(t)}{dt} = U(c(t))$ . Jetzt redefinieren wir die Ableitung (4.91) als die **Richtungsableitung** in Richtung  $U \in \mathcal{V}(X)$  gemäß:

$$(\nabla_U f)(w) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(c(t + \varepsilon)) - f(c(t))}{\varepsilon}. \quad (4.107)$$

Um die Äquivalenz der Definitionen (4.91) und (4.107) zu begründen, erinnern wir uns daran, wie man die Ableitung für die Komposition  $f(c(t))$  definiert:

$$\frac{df(c(t))}{dt} = f_{,\alpha}(c(t))\dot{c}_\alpha(t) = (\nabla f)(c(t)) \cdot \dot{c}(t) = U_\alpha(w)F_{,\alpha}(w) = (\nabla_U f)(w),$$

wobei  $\nabla f = (\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f)^\top$  den Gradienten von  $f$  bezeichnet und  $\dot{c} = (\dot{c}^1, \dot{c}^2, \dot{c}^3)^\top \in \mathcal{V}(X)$  das tangentielle Vektorfeld ist.

Für das des Normalenvektors (Gauß-Abbildung) im kartesischen Koordinatensystem (vgl. (4.105))

$$N(w) := (N_1(w), N_2(w), N_3(w))^\top = N_\gamma(w)e^\gamma, \quad w \in \mathcal{S} = X(\Omega) \quad (4.108)$$

**Normalableitung** (in Richtung des Normalenvektors  $N \perp \mathcal{V}(X)$ ) ist

$$\nabla_N \varphi := N_\alpha \partial_\alpha \varphi, \quad \varphi \in \mathbb{C}^1(\mathcal{S}). \quad (4.109)$$

### Die Günter'sche

$$\mathcal{D}_\alpha \psi = \partial_\alpha \psi - N_\alpha \nabla_N \psi = \nabla_{D_\alpha} \psi, \quad \psi \in \mathfrak{F}(X), \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (4.110)$$

und die **Stoke'sche**

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta} \psi := N_\alpha \partial_\beta \psi - N_\beta \partial_\alpha \psi = \nabla_{M_{\alpha\beta}} \psi, \quad \psi \in \mathfrak{F}(X), \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \quad (4.111)$$

Ableitungen sind Beispiele für Tangentialableitungen, denn die generierenden Vektorfelder

$$D_\alpha = e^\alpha - N_\alpha N = (\delta_{\alpha\gamma} - N_\alpha N_\gamma)e^\gamma, \quad M_{\alpha\beta} = N_\alpha e^\beta - N_\beta e^\alpha, \quad (4.112)$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3,$$

sind tangential, also gilt  $D_\alpha, M_{\alpha\beta} \in \mathcal{V}(X)$  oder anderes gesagt

$$D_\alpha \cdot N = M_{\alpha\beta} \cdot N = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \quad (4.113)$$

Daher sind diese Ableitungen für Funktionen  $\psi \in \mathfrak{F}(X)$  wohldefiniert (vgl. (4.107)).

**Lemma 4.39** Die Günter'schen Ableitungen  $\mathcal{D}_\alpha$  sind invariant unter regulärer Parametertransformation

$$\varphi : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega, \quad \det D\varphi(u, v) \neq 0, \quad \forall (u, v)^\top \in \Omega$$

der Fläche  $\mathcal{S} = X(\Omega)$ .

Die Stoke'schen Ableitungen  $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$  wechseln nur das Vorzeichen ( $\text{sign det } D\varphi$ )  $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$  bei regulärer Parametertransformation und sind invariant unter orientierungstreuer Parametertransformation ( $\det D\varphi(u, v) > 0$ ).

**Beweis.** Da die Ableitungen  $\mathcal{D}_\alpha$  und  $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$  nur vom Normalenvektor  $N(p)$  abhängig sind, folgt das Resultat aus Lemma 3.14. ■

Nur zwei der drei Günter'schen Ableitungen  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_n$  sind linear unabhängig und es gilt:

$$N_\gamma \mathcal{D}_\gamma = 0. \quad (4.114)$$

Analog sind nur zwei der neun Stoke'schen Ableitungen  $\mathcal{M}_{1,1}, \dots, \mathcal{M}_{n,n}$  linear unabhängig und die folgenden Gleichungen sind leicht zu verifizieren:

$$\mathcal{M}_{\alpha\alpha} = 0, \quad \mathcal{M}_{\alpha\beta} = -\mathcal{M}_{\beta\alpha}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} N_\alpha \mathcal{M}_{\beta\gamma} = 0, \quad (4.115)$$

wobei  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$  Permutationsvorzeichen bezeichnet:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha\gamma} &= \varepsilon_{\alpha\beta\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta\beta} = 0, \\ \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} &= 1 \quad \text{wenn } \{\alpha, \beta, \gamma\} \text{ gerade Permutation von } \{1, 2, 3\}, \\ \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} &= -1 \quad \text{wenn } \{\alpha, \beta, \gamma\} \text{ ungerade Permutation von } \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

Die Günter'sche und die Stoke'sche Ableitung sind abhängig voneinander:

$$\mathcal{D}_\alpha := N_\gamma \mathcal{M}_{\gamma\alpha}, \quad \mathcal{M}_{\alpha\beta} = N_\alpha \mathcal{D}_\beta - N_\beta \mathcal{D}_\alpha. \quad (4.116)$$

**Lemma 4.40** Sei  $\mathcal{S} = \partial\mathcal{R}$  eine reguläre geschlossene Fläche, die das kompakte Gebiet  $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^3$  umschließt.  $N(\tau) = (N_1(\tau), N_2(\tau), N_3(\tau))^\top$  sei der Normalenvektor (die Gauss-Abbildung), der nach außen zeigt.

Die Stoke'sche Formel

$$\oint_{\mathcal{S}} (\mathcal{M}_{\alpha\beta}\varphi)(\tau) d\sigma = 0 \quad (4.117)$$

gilt für alle  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$  und beliebige  $\varphi \in \mathbb{C}^1(\mathcal{S})$ .

**Beweis:** Nehmen wir vorübergehend an, dass  $\varphi$  die Spur  $\varphi = \Phi|_{\mathcal{S}}$  einer Funktion  $\Phi \in \mathbb{C}^2(\overline{\mathcal{R}})$  ist. Zweimaliges Anwendung des Gauß'schen Satzes in der Ebene

$$\int_{\mathcal{R}} \partial_{\alpha} \Phi(y) dy = \oint_{\mathcal{S}} N_{\alpha}(\tau) \varphi(\tau) d\sigma, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (4.118)$$

ergibt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}} (\partial_{\alpha} \partial_{\beta} \Phi)(y) dy &= \oint_{\mathcal{S}} N_{\alpha}(\tau) (\partial_{\beta} \varphi)(\tau) d\sigma, \\ \int_{\mathcal{R}} (\partial_{\beta} \partial_{\alpha} \Phi)(y) dy &= \oint_{\mathcal{S}} N_{\beta}(\tau) (\partial_{\alpha} \varphi)(\tau) d\sigma. \end{aligned}$$

Da  $\partial_{\alpha} \partial_{\beta} \Phi = \partial_{\beta} \partial_{\alpha} \Phi$  erhalten wir durch Subtraktion (4.117).

Wir bemerken an dieser Stelle ohne Beweis, dass die Menge der Funktionen mit Spur  $\varphi = \Phi|_{\mathcal{S}}$ , ( $\Phi \in \mathbb{C}^2(\overline{\mathcal{R}})$ ), dicht in  $\mathbb{C}^1(\mathcal{S})$  ist. Andererseits ist die Stoke'sche Ableitung tangential und kann auf eine Funktion angewandt werden, die nur auf  $\mathcal{S}$  definiert ist (vgl. (4.107)), also zu  $\varphi \in \mathbb{C}^1(\mathcal{S})$ . Dafür gilt die Formel (4.117) für beliebige  $\varphi \in \mathbb{C}^1(\mathcal{S})$ . ■

Mit  $A_{\mathbb{R}^n}^* = A^*$  bezeichnen wir im Folgenden den **Dualoperator** eines stetigen linearen Operators  $A$ , wenn gilt

$$(A\Phi, \Psi)_{\mathbb{R}^n} = (\Phi, A^*\Psi)_{\mathbb{R}^n} \quad \Phi, \Psi \in \mathbb{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n) \quad (4.119)$$

bezüglich des Skalarproduktes auf dem ganzen Euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$

$$(\Phi, \Psi)_{\mathbb{R}^n} = \oint_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \cdot \Psi(y) dy, \quad \Phi, \Psi \in \mathbb{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n). \quad (4.120)$$

Die dualen Operatoren zu Differentialoperatoren  $\mathcal{D}_{\alpha}$  und  $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$  auf  $\mathbb{R}^n$  sind wohlbekannt und die entsprechenden Gleichungen sind leicht nachweisbar mit Hilfe partieller Integration:

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{\alpha})_{\mathbb{R}^n}^* \varphi &= \mathcal{D}_{\alpha}^* \varphi = -\partial_{\alpha} \varphi + \partial_{\gamma} [N_{\gamma} N_{\alpha} \varphi], \\ (\mathcal{M}_{\alpha\beta})_{\mathbb{R}^n}^* \varphi &= \mathcal{M}_{\alpha\beta}^* \varphi = -\partial_{\beta} [N_{\alpha} \varphi] + \partial_{\alpha} [N_{\beta} \varphi]. \end{aligned} \quad (4.121)$$

### Der Dualoperator

$$(B\varphi, \psi)_{\mathcal{S}} = (\varphi, B^*_{\mathcal{S}} \psi)_{\mathcal{S}} \quad \varphi, \psi \in \mathbb{C}^{\infty}(\mathcal{S}) \quad (4.122)$$

bezüglich des Skalarproduktes auf der Fläche  $\mathcal{S} = X(\Omega)$

$$(\varphi, \psi)_{\mathcal{S}} = \oint_{\mathcal{S}} \varphi(\tau) \cdot \psi(\tau) d\sigma, \quad \varphi, \psi \in \mathbb{C}^{\infty}(\mathcal{S}) \quad (4.123)$$

lautet anders. Es gilt nämlich das Folgende:

**Korollar 4.41** Dualoperatoren  $(\mathcal{D}_\alpha)^*_{\mathcal{S}}$  zu den Günter'schen Differentialoperatoren  $\mathcal{D}_\alpha$  schreiben sich als

$$(\mathcal{D}_\alpha)^*_{\mathcal{S}} = -\mathcal{D}_\alpha\varphi + N_\alpha\mathcal{H}_{\mathcal{S}}, \quad (4.124)$$

wobei

$$\mathcal{H}_{\mathcal{S}} := \operatorname{div}N = \partial_\alpha N_\alpha = \mathcal{D}_\alpha N_\alpha \quad (4.125)$$

und  $(n-1)^{-1}\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$  die mittlere Krümmung darstellt (ohne Beweis).

Die Stoke'schen Ableitungen  $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$  sind **schief-symmetrisch auf  $\mathcal{S}$** :

$$(\mathcal{M}_{\alpha\beta})^*_{\mathcal{S}} = -\mathcal{M}_{\alpha\beta} = \mathcal{M}_{\beta\alpha}. \quad (4.126)$$

**Beweis:** Mit (4.117) beweisen wir (4.126)

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{S}} (\mathcal{M}_{\alpha\beta}\psi)(\tau)\varphi(\tau) d\sigma &= \oint_{\mathcal{S}} \mathcal{M}_{\alpha\beta}[\psi](\tau)\varphi(\tau) d\sigma - \oint_{\mathcal{S}} \psi(\tau)(\mathcal{M}_{\alpha\beta}\varphi)(\tau) d\sigma \\ &= -\oint_{\mathcal{S}} \psi(\tau)(\mathcal{M}_{\alpha\beta}\varphi)(\tau) d\sigma, \quad \varphi, \psi \in \mathbb{C}^\infty(\mathcal{S}) \end{aligned} \quad (4.127)$$

denn  $\mathcal{M}_{\alpha\beta}[\psi\varphi] = (\mathcal{M}_{\alpha\beta}\psi)\varphi + \psi(\mathcal{M}_{\alpha\beta}\varphi)$ .

Mit (4.116) und (4.126) erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_\alpha)^*_{\mathcal{S}}\varphi &= -\mathcal{M}_{\alpha,\beta}N_\beta\varphi = (N_\alpha\partial_\beta - N_\beta\partial_\alpha)N_\beta\varphi \\ &= N_\alpha(\partial_\beta N_\beta)\varphi + N_\alpha N_\beta\partial_\beta\varphi - N_\beta(\partial_\alpha N_\beta)\varphi - N_\beta^2\partial_\alpha\varphi \\ &= N_\alpha\mathcal{H}_{\mathcal{S}}\varphi + N_\alpha\nabla_N\varphi - \frac{1}{2}\partial_\alpha N_\beta^2\varphi - \partial_\alpha\varphi \\ &= -\mathcal{D}_\alpha\varphi + N_\alpha\mathcal{H}_{\mathcal{S}}\varphi, \quad \alpha = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

da  $N_\alpha^2 = |N| = 1$ . Die Gleichung  $\partial_\alpha N_\alpha = \mathcal{D}_\alpha N_\alpha$ , behauptet in (4.125), verifiziert man ähnlich:

$$\mathcal{D}_\alpha N_\alpha = \partial_\alpha N_\alpha - N_\alpha N_\beta\partial_\beta N_\alpha = \mathcal{H}_{\mathcal{S}} - \frac{N_\beta}{2}\partial_\beta N_\alpha^2 = \mathcal{H}_{\mathcal{S}}. \quad \blacksquare$$

#### 4.6 X-GRADIENT UND X-DIVERGENZ

Zu  $f \in \mathfrak{F}(X)$  betrachten wir die **Differential-1-Form**  $\omega_f$  gegeben durch

$$\omega_f(V) := L_V f = V^\alpha f_{,\alpha} \quad \text{für } V = V^\alpha X_{,\alpha}, \quad V \in \mathcal{V}(X). \quad (4.128)$$

Dann gibt es zu  $f$  genau ein Vektorfeld  $\nabla_X \in \mathcal{V}(X)$ , so dass gilt (vgl. Satz 1.18)

$$\omega_f(V) = (\nabla_X f, V) \quad \text{für alle } V \in \mathcal{V}(X). \quad (4.129)$$

Das Vektorfeld nennt man den **X-Gradienten** der Funktion  $f \in \mathfrak{F}(X)$ .

**Lemma 4.42** *Wir erhalten so eine lineare Abbildung*

$$\nabla_X : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{V}(X),$$

für die mit

$$\nabla_X f =: f^{\cdot\alpha} X_{,\alpha} \quad (4.130)$$

folgt

$$f^{\cdot\alpha} = g^{\alpha\beta} f_{,\beta}. \quad (4.131)$$

Insbesondere,

$$|\nabla_X f|^2 = f^{\cdot\alpha} f_{,\alpha} = g^{\alpha\beta} f_{,\alpha} f_{,\beta}. \quad (4.132)$$

In dem kartesischen Koordinatensystem (vgl. (4.105)) schreibt sich  $\nabla_X$  als

$$\nabla_X f = \mathcal{D}_X f := (\mathcal{D}_1 f, \mathcal{D}_2 f, \mathcal{D}_3 f)^\top, \quad (4.133)$$

$$L_V f = (\mathcal{D}_X f, V) = V_\gamma \mathcal{D}_\gamma f \quad \forall V = V_\gamma e^\gamma \in \mathcal{V}(X), \quad \forall f \in \mathcal{F}(X). \quad (4.134)$$

Der  $X$ -Gradient ist invariant unter einer orientierungstreuen Parametertransformation  $\varphi : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$  der Fläche  $\mathcal{S} = X(\Omega)$ .

**Beweis:** Zum Beweis von (4.131): Es gilt

$$(U, V) = g_{\alpha\beta} U^\alpha V^\beta \quad \text{für} \quad U = U^\alpha X_{,\alpha}, \quad V = V^\beta X_{,\beta}, \quad U, V \in \mathcal{V}(X)$$

da  $X_{,\alpha} \cdot X_{,\beta} = g_{\alpha\beta}$ . Für  $U^\alpha = g^{\alpha\beta} f_{,\beta}$  gilt insbesondere

$$(U, V) = g_{\alpha\beta} g^{\alpha\gamma} f_{,\gamma} V^\beta = \delta_{\gamma\beta} f_{,\gamma} V^\beta = f_{,\beta} V^\beta = L_V f,$$

also  $U = \nabla_X f$ .

Wir berechnen die Länge des Gradienten:

$$(\nabla_X f, \nabla_X f) = g_{\alpha\beta} f^{\cdot\alpha} f^{\cdot\beta} = g_{\alpha\beta} g^{\alpha\gamma} f_{,\gamma} f^{\cdot\alpha} = f^{\cdot\alpha} f_{,\alpha}$$

und erhalten Gleichung (4.132).

Da

$$\text{grad } f = (\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f)^\top = \mathcal{D}_X f + (\nabla_N f) N \quad (4.135)$$

(vgl. (4.110)), wobei  $\mathcal{D}f$  tangential ist ( $\mathcal{D}_X f, N) = \mathcal{D}_\alpha f, N_\alpha = 0$ ), erhalten wir

$$(\text{grad } f, V) = (\mathcal{D}_X f, V) + ((\nabla_N f) N, V) = (\mathcal{D}_X f, V) + \nabla_N f(N, V) = (\mathcal{D}_X f, V)$$

für alle  $V \in \mathcal{V}(X)$  da  $\nabla_N f$  skalar ist. Damit sind (4.133) und (4.134) bewiesen.

Die letzte Behauptung über die Invarianz des Gradienten  $\nabla_X$  folgt aus Lemma 4.39. ■

Es sei nun  $W \in \mathcal{V}(X)$  fest und  $A_W : \mathcal{V}(X) \rightarrow \mathcal{V}(X)$  definiert durch die kovariante Ableitung

$$A_W(V) := D_V W, \quad V \in \mathcal{V}(X).$$

Diese Abbildung ist  $\mathfrak{F}(X)$ -linear, d.h. es gilt (vgl. (4.96).K.2)

$$A_W(fU + gV) = fA_W(U) + gA_W(V).$$

Wir berechnen die Matrix bzgl. der Basis  $\{X_{,1}, X_{,2}\}$ . Für  $V = V^\alpha X_{,\alpha}$  erhalten wir aus (4.96)

$$A_W(V) = [V^\alpha W_{,\alpha}^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma V^\alpha W^\beta] X_{,\gamma}.$$

Bezeichnet also  $\mathcal{A}_W = [a_\alpha^\gamma]_{2 \times 2}$  die Matrix von  $A_W$ , so gilt

$$a_\alpha^\gamma = W_{,\alpha}^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma W^\beta.$$

Die Spur  $a_1^1 + a_2^2$  von  $\mathcal{A}_W$  nennt man die **X-Divergenz** des tangentialen Vektorfeldes  $W$ :

$$\operatorname{div}_X W := \operatorname{Spur} \mathcal{A}_W = a_1^1 + a_2^2 = W_{,\alpha}^\alpha + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha W^\beta. \quad (4.136)$$

Durch Differentiation der Determinante

$$g = \det G_X = g_{11}g_{22} - g_{12}^2, \quad g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} = X_{,\alpha} \cdot X_{,\beta},$$

der ersten Fundamentalform und Verwendung der Formel

$$X_{u^\alpha u^\beta} \cdot X_{u^\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma g_{\sigma\gamma},$$

(vgl. (4.45)), erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial_\beta g = g_{,\beta} &= 2g_{22}X_{,1\beta} \cdot X_{,1} + 2g_{11}X_{,2\beta} \cdot X_{,2} - 2g_{12}X_{,1\beta} \cdot X_{,2} - 2g_{12}X_{,1} \cdot X_{,2\beta} \\ &= 2g_{22}[\Gamma_{1\beta}^1 g_{11} + \Gamma_{1\beta}^2 g_{12}] + 2g_{11}[\Gamma_{2\beta}^1 g_{21} + \Gamma_{2\beta}^2 g_{22}] - 2g_{12}[\Gamma_{1\beta}^1 g_{12} + \Gamma_{1\beta}^2 g_{22}] \\ &\quad - 2g_{21}[\Gamma_{2\beta}^1 g_{11} + \Gamma_{2\beta}^2 g_{21}] \\ &= 2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)\Gamma_{1\beta}^1 + 2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)\Gamma_{2\beta}^2 = 2g\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha, \end{aligned}$$

also

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha = \frac{g_{,\beta}}{2g} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\beta \sqrt{g}. \quad (4.137)$$

Aus (4.136) und (4.137) folgt

$$\operatorname{div}_X W = W_{,\alpha}^\alpha + \frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_\beta \sqrt{g}) W^\beta = \frac{1}{\sqrt{g}} [\partial_\beta \sqrt{g} W^\beta],$$

d.h.

$$\operatorname{div}_X W = \frac{1}{\sqrt{g}} [\sqrt{g} W^\beta]_{,\alpha} . \quad (4.138)$$

Definieren wir nun eine lineare Abbildung  $\delta_X : \mathfrak{F}(X) \rightarrow \mathfrak{F}(X)$  durch

$$\Delta_X f := \operatorname{div}_X [\nabla_X f] , \quad (4.139)$$

so erhalten wir mit  $\nabla_X f = [g^{\alpha\beta} f_{,\beta}] X_{,\alpha}$  und (4.139)

$$\Delta_X f = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\alpha [\sqrt{g} g^{\alpha\beta} \partial_\beta f] . \quad (4.140)$$

Man nennt  $\Delta_X$  den **Laplace-Beltrami-Operator auf  $X$** .

**Theorem 4.43** *Die  $X$ -Divergenz des tangentialen Vektorfeldes in kartesischen Koordinaten schreibt man als*

$$\operatorname{div}_X U = \mathcal{D}_\gamma U_\gamma , \quad U = U^\alpha X_{,\alpha} = U_\gamma e^\gamma \in \mathcal{F}(X) . \quad (4.141)$$

*Die  $X$ -Divergenz ist invariant bezüglich einer orientierungstreuen Parametertransformation  $\varphi : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$  der Fläche  $\mathcal{S} = X(\Omega)$ .*

*Entsprechend hat der Laplace-Beltrami-Operator in kartesischen Koordinaten die Form*

$$\Delta_X \varphi = \mathcal{D}_\alpha^2 \varphi = \mathcal{D}_1^2 \varphi + \mathcal{D}_2^2 \varphi + \mathcal{D}_3^2 \varphi , \quad \varphi \in \mathfrak{F}(X) . \quad (4.142)$$

*Er ist invariant bezüglich einer orientierungstreuen Parametertransformation und **symmetrisch** auf die Fläche  $(\Delta_X)^*_{\mathcal{S}} = \Delta_X$ , d.h.,*

$$(\Delta_X U, V)_{\mathcal{S}} = -(U, \Delta_X V)_{\mathcal{S}} \quad \forall U, V \in \mathfrak{F}(X) . \quad (4.143)$$

**Beweis:** In kartesischen Koordinaten definiert man die  $X$ -Divergenz als den zum  $X$ -Gradienten negative dualen Operator  $\operatorname{div}_X = (\nabla_X)^*_{\mathcal{S}}$  (wie auch in  $\mathbb{R}^n$ ):

$$(\nabla_X f, V)_{\mathcal{S}} = -(f, \operatorname{div}_X V)_{\mathcal{S}} , \quad f \in C^1(X) , \quad U \in \mathcal{V}(X) . \quad (4.144)$$

Also, mit (4.124) erhalten wir

$$\operatorname{div}_X U = -(\nabla_X)^*_{\mathcal{S}} U = (\mathcal{D}_\alpha)^*_{\mathcal{S}} U_\alpha = \mathcal{D}_\alpha U_\alpha - N_\alpha \mathcal{H}_S U_\alpha = \mathcal{D}_\alpha U_\alpha - \mathcal{H}_S N \cdot U = \mathcal{D}_\alpha U_\alpha$$

denn  $U = (U_1, U_2, U_3)^\top$  tangential ist und  $N \cdot U = 0$ .

Die Behauptung über die Invarianz der  $X$ -Divergenz folgt aus Lemma 4.39.

Mit (4.141) erhalten wir (4.142) und die Selbstadjungiertheit (4.143) folgt weil

$$(\Delta_X)^*_{\mathcal{S}} = (\operatorname{div}_X \nabla_X)^*_{\mathcal{S}} = (\nabla_X)^*_{\mathcal{S}} (\operatorname{div}_X)^*_{\mathcal{S}} = \operatorname{div}_X \nabla_X = \Delta_X .$$

Die Behauptung über die Invarianz von der  $X$ -Divergenz und des Laplace-Beltrami Operators folgt aus den Lemmata 4.39 und 4.42. ■

## 4.7 PARALLELVERSCHIEBUNG UND GEODÄTISCHE

Sei  $X : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine reguläre Fläche und es sei  $\omega : [a, b] \rightarrow \Omega$  eine Kurve in  $\Omega$ , sowie  $c := X \circ \omega$  die zugehörige Kurve auf  $X$ .

**Definition 4.44** *Ein Vektorfeld*

$$V : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

heißt **tangential längs** der Kurve  $c$ , falls für alle  $t \in [a, b]$  gilt:

$$V(t) \in T_{\omega(t)}X = T_{c(t)}X.$$

$\mathcal{V}_c$  bezeichnet die Klasse der tangentialen Vektorfelder längs  $c$ .

Für ein beliebiges tangenciales Vektorfeld  $V \in \mathcal{V}_c$  längs  $c$  können wir schreiben

$$V = V(t) = V^\alpha(t)X_{,\alpha}(\omega(t)), \quad t \in [a, b],$$

und man definiert die **kovariante Ableitung**

$$\frac{DV(t)}{dt} \in \mathcal{V}_c$$

durch

$$\frac{DV(t)}{dt} := P(\omega(t)) \left[ \frac{d}{dt} V(t) \right]. \quad (4.145)$$

Hier ist, wie oben,  $P(w) : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_wX$  die orthogonale Projektion auf den Tangentialraum (vgl. (4.100)). Insbesondere folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} U \cdot V &= \left[ \frac{DU}{dt} + (I - P) \frac{dU}{dt} \right] \cdot V + U \cdot \left[ \frac{DV}{dt} + (I - P) \frac{dV}{dt} \right] \\ &= \frac{DU}{dt} \cdot V + U \cdot \frac{DV}{dt} \end{aligned} \quad (4.146)$$

für  $U, V \in \mathcal{V}_c$  denn  $(I - P) \frac{dU}{dt} \cdot V = 0$ .

Da

$$\frac{dV}{dt} = \dot{V}^\alpha X_{,\alpha}(\omega) + V^\alpha X_{,\alpha\beta}(\omega) \dot{\omega}^\beta,$$

liefert die Gauß'sche Darstellungsformel

$$\frac{DV}{dt} = \left[ \dot{V}^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma V^\alpha \dot{\omega}^\beta \right] X_{,\gamma}(\omega). \quad (4.147)$$

Insbesondere für  $t = s$  (d.h.  $c$  ist nach Bogenlänge parametrisiert) und

$$\begin{aligned} V(s) &= \dot{c}(s), & \ddot{c}(s) &= \dot{V}(s) = \kappa_g \mathfrak{s}(s) + \kappa_n N(s), \\ \frac{D\dot{c}}{ds} &= P(\omega)\ddot{c} = \kappa_g \mathfrak{s}, \end{aligned} \quad (4.148)$$

denn  $PN = 0$ . Es folgt:

**Lemma 4.45** *Die geodätische Krümmung  $\kappa_g(s)$  von  $c(s)$  ist genau dann identisch Null  $\kappa_g(s) \equiv 0$ , wenn gilt*

$$\frac{D\dot{c}}{ds} \equiv 0, \quad (4.149)$$

bzw. wenn gilt (vgl. (4.147))

$$\frac{d^2\omega^\gamma}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{d\omega^\alpha}{ds} \frac{d\omega^\beta}{ds} = 0 \quad \text{für } \gamma = 1, 2 \quad (4.150)$$

denn  $c = X \circ \omega$  impliziert  $\dot{c} = \dot{\omega}^\alpha X_{,\alpha}(\omega)$  und (4.147) ist anwendbar. ■

**Definition 4.46** *Allgemein nennt man Kurven  $c(t) = X \circ \omega(t)$ , die den Gleichungen (4.150) (oder der Gleichung (4.149)) genügen, mit  $s$  ersetzt durch  $t$ , **geodätische Kurven** oder **Geodätische** auf  $X$ .*

*Die Gleichungen (4.150) (und (4.149)) heißen die Differentialgleichungen der Geodätischen.*

**Korollar 4.47** *Geodätische Kurven auf  $X$  sind invariant unter Isometrien: die isometrische Abbildung  $\varphi : X \rightarrow Y$  bildet jede geodätische Kurve  $c$  auf  $X$  auf eine geodätische Kurve  $\varphi(c)$  auf  $Y$  ab.*

**Beweis:** Das Resultat ist wahr weil, die Gleichung der geodätischen Kurve (4.150) in Cristoffel-Symbolen geschrieben ist und diese Symbole invariant unter Isometrien sind (vgl. Korollar 4.24). ■

**Definition 4.48** *Ein Vektorfeld  $V = V^\alpha X_{,\alpha}(\omega) \in \mathcal{V}_c$  heißt **parallel**, falls längs  $c$  gilt*

$$\frac{DV}{dt} = 0, \quad (4.151)$$

d.h. falls

$$\dot{V}^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma V^\alpha \dot{\omega}^\beta = 0, \quad \gamma = 1, 2. \quad (4.152)$$

Aus (4.146) folgt, dass für parallele Vektorfelder  $U, V \in \mathcal{V}_c$  gilt

$$U(t) \cdot V(t) \equiv \text{const} \quad \text{auf} \quad [a, b],$$

insbesondere also

$$|U(t)| \equiv \text{const}, \quad \cos \theta(t) = \frac{U(t) \cdot V(t)}{|U(t)||V(t)|} \equiv \text{const} \quad \text{falls} \quad \frac{DU}{dt} = \frac{DV}{dt} \equiv 0,$$

wobei  $[0, 2\pi) \ni \theta(t) := \angle\{U(t), V(t)\}$ .

**Korollar 4.49** *Parallele Vektorfelder haben konstante Länge und der Winkel zwischen zwei parallelen Vektorfeldern bleibt konstant.*

Für geodätische Kurve ist tangentvektor parallel (vgl. (4.149) und (4.151)). ■

Da das Geschwindigkeitsfeld  $\dot{c}$  einer Geodätischen parallel ist  $|\dot{c}(t)| \equiv \text{const}$ , es folgt:

**Satz 4.50** *Jede Geodätische (d.h. Lösung von (4.150) oder von (4.149)) ist proportional zur Bogenlänge parametrisiert.* ■

**Korollar 4.51** *Für jede Geodätische ist die geodätische Krümmung gleich Null, da (4.148) bis auf einen konstanten Faktor ( $\neq 0$ ) gilt.*

Wir betrachten jetzt das **Energiefunktional**

$$E(c) := \frac{1}{2} \int_a^b |\dot{c}(t)|^2 dt \quad (4.153)$$

sowie das **Längenfunktional**

$$L(c) := \int_a^b |\dot{c}(t)| dt \quad (4.154)$$

für Kurven  $c = X \circ \omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  auf  $X$ .

Für eine gegebene Kurve  $c$  und ein tangentiales Vektorfeld  $V \in \mathcal{V}_c$  längs  $c$  wollen wir die ersten Variationen

$$\delta E(c, V) \quad \text{und} \quad \delta L(c, V)$$

definieren und berechnen. Dazu betten wir die gegebene Kurve  $c(t)$  in die differenzierbare Familie  $\psi(t, \varepsilon)$ ,  $(t, \varepsilon) \in [a, b] \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$  von Kurven  $\psi(\cdot, \varepsilon)$  auf  $X$  ein, so dass gilt

$$\psi(t, 0) = c(t)$$

und

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \psi(t, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = V(t).$$

Es folgt

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = \dot{V}(t).$$

Mittels der Familie  $\psi(t, \varepsilon)$  erhalten wir eine Abbildung

$$\tilde{E} : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R},$$

gegeben durch

$$\tilde{E}(\varepsilon) := E(\psi(\cdot, \varepsilon)),$$

und es folgt

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \tilde{E}(\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} &= \frac{1}{2} \int_a^b \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \varepsilon) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \varepsilon) \right] \right|_{\varepsilon=0} dt \\ &= \int_a^b \dot{c}(t) \cdot \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} dt = \int_a^b \dot{c}(t) \cdot \dot{V}(t) dt \\ &= \int_a^b \dot{c} \cdot \frac{DV}{dt} dt, \end{aligned} \quad (4.155)$$

denn  $\dot{c} \in \mathcal{V}_c$ . Da das Ergebnis nur von  $c$  und von  $V$  abhängt, setzen wir

$$\delta E(c, V) := \left. \frac{d}{d\varepsilon} E(\psi(\cdot, \varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \dot{c} \cdot \frac{DV}{dt} dt. \quad (4.156)$$

Eine analoge Rechnung für  $L$  und die entsprechende Definition ergeben insgesamt

$$\delta L(c, V) = 2 \int_a^b \dot{c}(t) \cdot \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} \frac{dt}{|\dot{c}(t)|} = 2 \int_a^b \dot{c} \cdot \frac{DV}{dt} \frac{dt}{|\dot{c}(t)|}. \quad (4.157)$$

Für  $V \in \mathcal{V}_c$  mit  $V(a) = V(b) = 0$  liefert eine partielle Integration in Gleichung (4.156)

$$\delta E(c, V) = - \int_a^b \frac{D\dot{c}}{dt} \cdot V dt. \quad (4.158)$$

Ist  $c$  außerdem proportional zur Bogenlänge parametrisiert, also  $|\dot{c}(t)| = \text{const} \neq 0$ , so folgt aus (4.157)

$$\delta L(c, V) = - \frac{2}{|\dot{c}(t)|} \int_a^b \frac{D\dot{c}}{dt} \cdot V dt. \quad (4.159)$$

Vom Standpunkt der Variationsrechnung aus, muss gelten

$$\delta E(c, V) = 0 \quad \forall V \in \mathcal{V}_c \quad \text{mit} \quad V(a) = V(b) = 0,$$

was zu

$$\frac{D\dot{c}}{dt} \equiv 0, \quad \text{also zu (4.149) äquivalent ist.}$$

Weiterhin haben wir

$$|\dot{c}(t)| = \text{const} : \quad \delta L(c, V) = 0 \quad \forall V \in \mathcal{V}_c \quad \text{mit} \quad V(a) = V(b) = 0$$

und dazu äquivalent

$$\frac{D\dot{c}}{dt} \equiv 0, \quad \text{d.h. (4.149).}$$

(Variationen der Kurve  $c$ , wobei Anfangs- und Endpunkt festbleiben).

**Es folgt:** Die Gleichung (4.149) ist die Euler-Gleichung des Energie-Funktional  $E(c)$ , und auch die Euler-Gleichung des Längen-Funktional  $L(c)$  (wenn man sich auf Kurven beschränkt, die proportional zur Bogenlänge parametrisiert sind).

**Satz 4.52** Geodätische minimieren (lokal) die Länge und die Energie. ■

**Beispiel 4.53 Geodätische auf dem Zylinder.** Es sei

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$$

der senkrechte Zylinder über dem Einheitskreis.

Die Parametrisierung  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  mit

$$X(u_1, u_2) = (\cos u_1, \sin u_1, u_2)$$

ist eine (lokale) Isometrie (vgl. Beispiel 4.9 und Satz 4.10).

Da der Zylinder lokal isometrisch zur Ebene ist, sind die Bilder der Geodätischen auf einer Ebene (d. h. die Bilder von Geraden) die Geodätischen auf dem Zylinder (vgl. Korollar 4.47).

Es sei dazu

$$p = X(0, 0) = (1, 0, 0) \quad \text{und} \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a^2 + b^2 = 1 \quad \text{fest.}$$

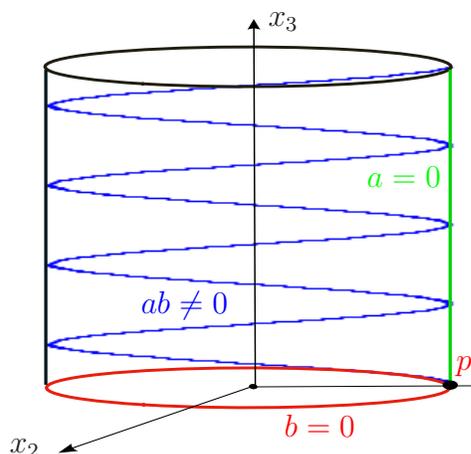
Wir betrachten die Bilder der Geraden

$$\omega_{ab}(s) := (as, bs), \quad s \in \mathbb{R},$$

die durch  $(0, 0)$  in  $\mathbb{R}^2$  laufen und mittels

$$c_{ab}(s) = X \circ \omega(s) = X(as, bs) = (\cos as, \sin as, bs).$$

auf Zylinder abgebildet werden.  $c_{ab}$  sind Geodätische Kurven auf dem  $S$  die durch der Punkt  $p$  laufen.



Geometrische Interpretation:

Fig. 4.4

**3 Fälle:**

- $a = 0$  :  $\omega_{0b}(s) = (0, bs)$   
 $c_{ab}(s) = (1, 0, \pm s)$   
 "senkrechte Gerade durch  $p$ ".
- $b = 0$  :  $\omega_{a0}(s) = (as, 0)$   
 $c_{ab}(s) = (\cos s, \sin s, 0)$   
 "ebene Kreislinie durch  $p$ ".
- $ab \neq 0$  :  $\omega_{ab}(s) = (as, bs)$   
 $c_{ab}(s) = (\cos as, \sin as, bs)$   
 "Helix durch  $p$ ".

**Satz 4.54** Es sei  $c = X \circ \omega, \omega : [a, b] \rightarrow \Omega$  eine Kurve auf  $X$  und  $W_0 \in T_{c(t_0)}X, t_0 \in [a, b]$ . Dann gibt es genau ein paralleles Vektorfeld  $W \in \mathcal{V}_c$  mit  $W(t_0) = W_0$ .

**Beweis:** (4.152) ist ein lineares System von zweier gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung für  $W = (W_1, W_2)^T$  mit Anfangsbedingungen  $W(t_0) = W_0$ . Deshalb folgt die Behauptung aus dem bekannten Existenz- und Eindeutigkeitsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen. ■

**Definition 4.55** Es sei  $c = X \circ \omega, W_0 \in T_{c(t_0)}X, t_0 \in [a, b]$  wie in Satz 4.54.

Weiter sei  $W$  das (eindeutig bestimmte) parallele Vektorfeld längs  $c$  mit  $W(t_0) = W_0$ . Für  $t_1 \in [a, b]$  heißt  $W(t_1)$  die Parallelverschiebung von  $W_0$  längs  $c$ .

**Bemerkung 4.56** i. Die Parallelverschiebung von  $W_0$  längs  $c$  hängt nicht von der Parametrisierung der Kurve  $c$  ab. In der Tat, für beliebige Umparametrisierung

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow [a, b], \quad \varphi'(\tau) \neq 0 \quad \text{für } \tau \in [0, 1]$$

$$\tilde{c}(\tau) := c(\varphi(\tau)) = (X \circ \omega)(\varphi(\tau))$$

folgt es:

$$\tilde{W}(\tau) := W(\varphi(\tau)), \quad W(t) = W^\alpha(t)X_{,\alpha}(\omega(t)) \Rightarrow$$

$$\tilde{W}(\tau) = W^\alpha(\varphi(\tau))X_{,\alpha}(\omega(\varphi(\tau))) = \tilde{W}^\alpha(\tau)X_{,\alpha}(\tilde{\omega}(\tau))$$

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\tilde{W}}(\tau) + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(\tilde{\omega}(\tau))\tilde{W}^\alpha(\tau)\dot{\tilde{\omega}}^\beta(\tau) \\ &= \left\{ \dot{W}^\gamma(\varphi(\tau)) + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(\omega(\varphi(\tau)))W^\alpha(\varphi(\tau))\dot{\omega}^\beta(\varphi(\tau)) \right\} \varphi'(\tau). \end{aligned}$$

Da  $\varphi'(\tau) \neq 0$ , erhalten wir

$$\dot{W}^\gamma(\varphi(\tau)) + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(\omega(\varphi(\tau)))W^\alpha(\varphi(\tau))\dot{\omega}^\beta(\varphi(\tau)) = 0$$

und das gewünschte Ergebnis folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung von (4.152):

- ii. Sind  $p, q \in X(\omega)$ , und ist  $c = X \circ \omega$ ,  $\omega : [a, b] \rightarrow \Omega$  eine Kurve auf  $X$  mit  $c(a) = p$ ,  $c(b) = q$ , so hat man eine Abbildung

$$P_c : T_p X \rightarrow T_q X,$$

wobei  $P_c$  jedem Tangentenvektor  $W_0 \in T_p X$  die Parallelverschiebung längs  $c$  in  $b$  zuordnet. Aus (4.146) folgt, dass  $P_c$  eine Isometrie ist:

$$\frac{dU}{dt} \cdot V = 0, \quad \frac{dV}{dt} \cdot U = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} U \cdot V = 0 \quad \Rightarrow \quad U \cdot V = \text{const.}$$

- iii. Sind zwei Flächen  $S = X(\Omega)$ ,  $\tilde{S} = \tilde{X}(\tilde{\Omega})$  tangential längs einer Kurve  $c$ , so ist die Parallelverschiebung längs  $c$  in  $S$  und  $\tilde{S}$  dieselbe, da für  $p \in \text{Spur } c$  gilt:  $T_p S = T_p \tilde{S}$ . Da die Projektionen auf die Tangentialräume übereinstimmen, stimmen auch die kovarianten Ableitungen überein.

**Beispiel 4.57**  $S = S^2 \subset \mathbb{R}^3$  ist die **Einheitssphäre**,  $C = \text{Spur } c \subset S$  -Breitenkreis der Breite  $\pi/2 - \varphi$ ,  $p \in C$ ,  $W_0 \in T_p C \subset T_p S$ .

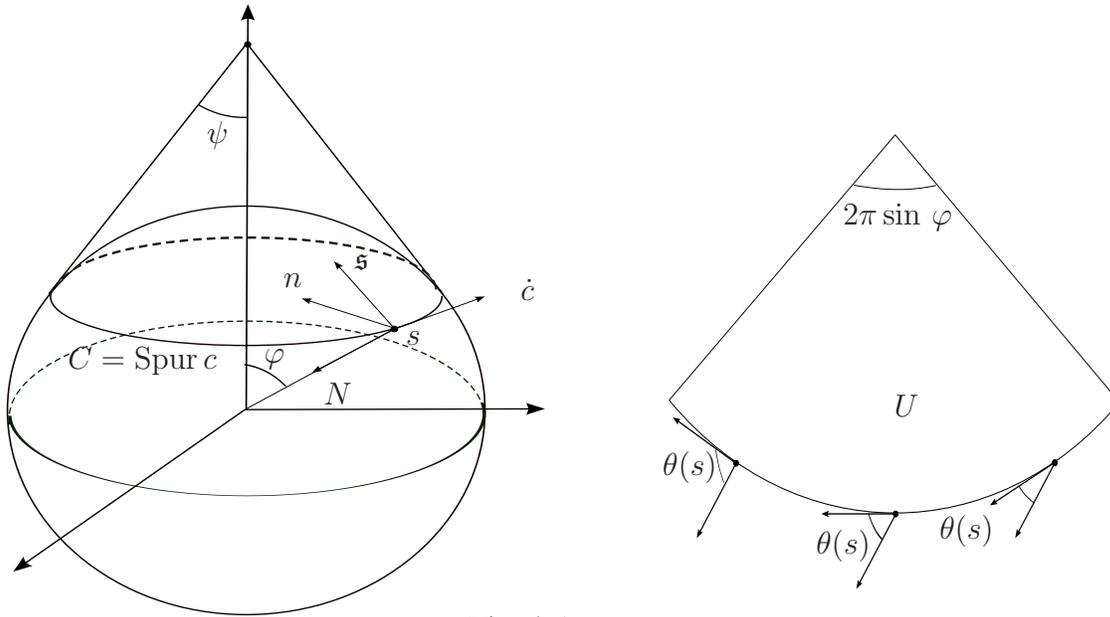


Fig. 4.5

Betrachte den Kegel  $K_\varphi$ , der tangential zu  $S$  längs  $C$  ist. Es sei  $\psi \in (0, \pi)$  der Öffnungswinkel von  $K_\varphi$ ; dann gilt  $\psi = \pi/2 - \varphi$  ( $C \neq \text{Äquator}$ ). Betrachte die Parallelverschiebung von  $W_0$  längs  $C$  in  $K_\varphi$ . Ein Kegel ohne Erzeugende ist isometrisch zu dem Sektor  $U$

$$U = \{(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) : \rho > 0, \theta \in (0, \alpha)\}$$

wobei  $\alpha = 2\pi \sin \varphi$  (vgl. Beispiel 4.13).

Parallelverschiebung in der Ebene ist aber nichts anderes als Translation!  $c = c(s)$  sei nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann folgt  $\angle(W(s), t(s)) = \theta(s)$  und die Parallelvektorfeld ist in umschließende Raum  $\mathbb{R}^3$  nicht selbstparallel (damit ist Breitenkreis der Breite  $\pi/2 - \varphi \neq 0$  keine Geodätische; vgl. Korollar 4.59).

Ist  $c$  der Äquator, so vergleichen wir mit einem Zylinder. In der Ebene ist das Bild von  $c$  dann eine Strecke, und  $t(s)$  ist in umschließende Raum  $\mathbb{R}^3$  schon selbstparallel (damit ist der Äquator ein Kandidat für Geodätische; vgl. Korollar 4.59).

**Satz 4.58** *Es sei durch  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine reguläre Fläche  $S = X(\Omega)$  definiert.*

*Ist  $p \in S$  und  $W_0 \in T_p S$  mit  $W_0 \neq 0$ , so existiert  $\varepsilon > 0$  und eine eindeutig bestimmte Geodätische  $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ , die nach Bogenlänge parametrisiert ist mit*

$$c(0) = p, \quad \dot{c}(0) = \frac{W_0}{|W_0|}.$$

**Beweis:** Die Differentialgleichungen der Geodätischen (4.150), ist ein System zweier gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die Behauptung folgt aus dem Existenz- und Eindeigkeitssatz. ■

**Korollar 4.59** *Die Geodätischen auf der Sphäre sind nur Großkreise (Synonym: **Äquator**).*

**Beweis:** Die Sphäre mit Radius  $R$  hat die Krümmung  $K = \frac{1}{R}$ . Dann hat der Breitenkreis der Breite  $\frac{\pi}{2} - \varphi$  den Radius  $r^c = R \sin \varphi$  und die Krümmung  $\kappa_n(s) = \frac{1}{R \sin \varphi}$ , da  $\kappa_n(s)$  die Projektion von  $\frac{1}{R}N(s)$  auf die Normale  $n(s)$  ist ( $n(s)$  liegt in der Ebene des Kreises; vgl. Fig. 4.5). Daraus folgt

$$K^2 = (\kappa_g^c)^2 + (\kappa_n^c)^2,$$

also

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{R^2 \sin^2 \varphi} + (\kappa_g^c)^2, \quad \text{d.h.} \quad \kappa_g^c = \frac{1}{R} \cot \varphi.$$

Dann ist  $\kappa_g^c$  äquivalent zu  $\cot \varphi = 0$  und daraus  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

Ist  $p \in S^2$  und  $W_0 \in T_p S^2$ , so gibt es genau einen Großkreis, der als Schnitt von  $S^2$  mit der affinen Ebene durch  $p$  entsteht und den Vektor  $W_0$  enthält. Dieser Großkreis ist also die eindeutig bestimmte Geodätische. ■

Ausgehend von der Gleichung für nach Bogenlänge parametrisierte Kurven  $c = X \circ \omega$  auf  $X$

$$\frac{D\dot{c}}{ds} = \kappa_g \mathfrak{s}, \quad \mathfrak{s}(s) := N(s) \wedge \dot{c}(s)$$

(vgl. (4.148)) betrachten wir jetzt Einheitsvektorfelder  $W \in \mathcal{V}_c$  längs einer gegebenen Kurve  $c$  auf  $X$ .

**Definition 4.60** *Mit*

$$\frac{DW}{dt} := \lambda(t) [N(t) \wedge W(t)], \quad W \in \mathcal{V}_c, \quad |W| = 1$$

heißt die Größe

$$\left[ \frac{DW}{dt} \right] := \lambda(t), \quad t \in [a, b],$$

der algebraische Wert der kovarianten Ableitung von das Einheitsvektorfeld  $W$  in  $t$ .

**Bemerkung 4.61** *Ist  $|\dot{c}(t)| = 1$  (d.h., nach Bogenlänge parametrisiert), so (vgl. (4.149))*

$$\left[ \frac{D\dot{c}(t)}{dt} \right] = \kappa_g(t).$$

**Aufgabe:** Darstellung des algebraischen Werts der kovarianten Ableitung von  $W$ .

Hierfür beweisen wir zuerst ein paar Hilfssätze. Zunächst untersuchen wir, wie sich der Winkel zwischen zwei Einheitsvektorfeldern  $V, W \in \mathcal{V}_c$  längs der glatten Kurve  $c$  ändert. Dafür schreiben wir

$$W(t) = v(t)V(t) + \bar{v}(t)\bar{V}(t), \quad (4.160)$$

wobei  $\{V(t), \bar{V}(t)\}$  eine positive Orthonormalbasis von  $T_{c(t)}X$  ist.

**Lemma 4.62** *Es seien  $v, \bar{v}$  glatte Funktionen auf  $[a, b]$  mit  $v^2 + \bar{v}^2 = 1$ . Wähle  $\varphi_0$  so, dass  $v(a) = \cos \varphi_0, \bar{v}(a) = \sin \varphi_0$  und setze für  $t \in [a, b]$*

$$\varphi(t) := \varphi_0 + \int_a^t (v\bar{v}' - \bar{v}v') dt. \quad (4.161)$$

Dann gilt

$$v(t) = \cos [\varphi(t)], \quad \bar{v}(t) = \sin [\varphi(t)], \quad t \in [a, b]. \quad (4.162)$$

**Beweis:** Setze:

$$\Delta := \frac{1}{2}(v - \cos \varphi)^2 + \frac{1}{2}(\bar{v} - \sin \varphi)^2 = 1 - v \cos \varphi - \bar{v} \sin \varphi.$$

Es genügt zu beweisen, dass  $\Delta(t) \equiv 0$ . Da  $\Delta(a) = 0$ , bleibt zu überprüfen  $\Delta'(t) = 0$  (vgl. (4.162)), denn dies impliziert  $\Delta(t) = \text{const} = \Delta(a) = 0$ . Dafür betrachten wir die Ableitung:

$$\begin{aligned} \Delta' &:= -v\varphi' \sin \varphi + \bar{v}\varphi' \cos \varphi + v' \cos \varphi + \bar{v}' \sin \varphi \\ &= (v\bar{v}' - \bar{v}v')(-v \sin \varphi + \bar{v} \cos \varphi) + v' \cos \varphi + \bar{v}' \sin \varphi \\ &= -\bar{v}'(v^2 + \bar{v}^2) \sin \varphi - v'(v^2 + \bar{v}^2) \cos \varphi + v' \cos \varphi + \bar{v}' \sin \varphi \equiv 0, \end{aligned}$$

denn  $\varphi' = v\bar{v}' - \bar{v}v'$  (vgl. (4.161)) und  $vv' + \bar{v}\bar{v}' = 0$  (folgt von  $v^2 + \bar{v}^2 = 1$ ). ■

**Lemma 4.63** *Es seien  $V, W \in \mathcal{V}_c$  tangentielle Einheitsvektorfelder längs  $c$ . Dann gilt*

$$\left[ \frac{DW}{dt} \right] - \left[ \frac{DV}{dt} \right] = \frac{d\varphi}{dt}, \quad (4.163)$$

wobei  $\varphi(t)$  den orientierten Winkel zwischen  $V(t)$  und  $W(t)$  mißt.

**Beweis:** Mit  $\bar{V} = N \wedge V$  und  $\bar{W} = N \wedge W$  gilt:

$$W = \cos \varphi V + \sin \varphi \bar{V} \quad (4.164)$$

und

$$\bar{W} = N \wedge W = \cos \varphi (N \wedge V) + \sin \varphi (N \wedge \bar{V}) = \cos \varphi \bar{V} - \sin \varphi V \quad (4.165)$$

denn  $N \wedge V = \bar{V}$ ,  $N \wedge \bar{V} = -V$ . Differentiation von (4.164) liefert

$$W' = -\varphi' \sin \varphi V + \cos \varphi V' + \varphi' \cos \varphi \bar{V} + \sin \varphi \bar{V}'$$

und das Skalarprodukt mit (4.165) ergibt

$$\begin{aligned} W' \cdot \bar{W} &= \varphi' \sin^2 \varphi + \varphi' \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi V \cdot \bar{V}' + \cos^2 \varphi \bar{V} \cdot V' \\ &= \varphi' + \cos^2 \varphi \bar{V} \cdot V' - \sin^2 \varphi V \cdot \bar{V}' \end{aligned}$$

denn  $V \cdot \bar{V} = V \cdot V' = \bar{V} \cdot \bar{V}' = 0$ . Aus  $V \cdot \bar{V} = 0$  folgt  $V' \cdot \bar{V} + V \cdot \bar{V}' = 0$  und weiter:

$$W' \cdot \bar{W} = \varphi' + V' \cdot \bar{V}.$$

Somit erhalten wir die gewünschte Gleichung (4.163):

$$\left[ \frac{DW}{dt} \right] = W' \cdot \bar{W} = \frac{d\varphi}{dt} + \left[ \frac{DV}{dt} \right],$$

denn

$$W' \cdot \bar{W} = \frac{dW}{dt} \cdot \bar{W} = \frac{DW}{dt} \cdot \bar{W} = \left[ \frac{DW}{dt} \right] (N \wedge W) \cdot \bar{W} = \left[ \frac{DW}{dt} \right]$$

und analog  $V' \cdot \bar{V} = \left[ \frac{DV}{dt} \right]$ . ■

Ist  $W(s) = \dot{c}(s)$ ,  $|\dot{c}| = 1$ , und  $V$  ein paralleles Vektorfeld längs  $c$ , so liefert das Lemma 4.63:

$$\kappa_g(s) = \left[ \frac{DW}{ds} \right] = \frac{d\varphi}{ds}. \quad (4.166)$$

**Korollar 4.64** *Die geodätische Krümmung ist die Änderungsrate des Winkels, den die Tangente mit einem längs  $c$  parallelen Vektorfeld bildet.*

Vergleichen wir mit einem der kanonischen Basisvektoren, z.B. mit  $X_{u^1}$ , so erhalten wir:

**Satz 4.65** *Es sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine orthogonale Parametrisierung, d.h.  $\mathcal{F} = 0$ . Ist dann  $c = X \circ \omega$ ,  $\omega : [a, b] \rightarrow \Omega$  eine Kurve in  $X$ , und  $W \in \mathcal{V}_c$  ein tangentiales Einheitsvektorfeld längs  $c$ , so gilt*

$$\left[ \frac{DW}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}} \left\{ \mathcal{G}_{u^1} \frac{d\omega^2}{dt} - \mathcal{E}_{u^2} \frac{d\omega^1}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt}, \quad (4.167)$$

wobei  $\varphi(t)$  den orientierten Winkel von  $X_{u^1(t)}$  (oder von  $X_{u^2(t)}$ ) nach  $W(t)$  bezeichnet (bzgl. der Orientierung  $(X_{u^1}, X_{u^2})$  des Tangentialraums).

**Beweis:** Wir haben die gleiche Formel (4.167) für beide Winkel  $\varphi_\alpha := \angle(X_{u^\alpha}, W)$ ,  $\alpha = 1, 2$ , da aus  $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{3\pi}{2}$  folgt es  $\varphi'_1 = \varphi'_2 = \varphi'$ . Also, nehmen wir an  $\varphi = \varphi_1 = \angle(X_{u^1}, W)$ .

Auf  $c$  betrachten wir die Einheitsvektoren (natürliche Basis)

$$e_1 := \frac{X_{u^1}}{\sqrt{\mathcal{E}}}, \quad e_2 := \frac{X_{u^2}}{\sqrt{\mathcal{G}}},$$

so dass  $N(t) = e_1(t) \wedge e_2(t)$ . Aus Lemma 4.63 folgt

$$\left[ \frac{DW}{dt} \right] = \left[ \frac{De_1}{dt} \right] + \frac{d\varphi}{dt}.$$

Nun ist

$$\left[ \frac{De_1}{dt} \right] = \frac{de_1}{dt} \cdot (N \wedge e_1) = \frac{de_1}{dt} \cdot e_2 = (e_1)_{u^1} \cdot e_2 \frac{d\omega^1}{dt} + (e_1)_{u^2} \cdot e_2 \frac{d\omega^2}{dt}.$$

Aus  $\mathcal{F} = X_{u^1} \cdot X_{u^2} \equiv 0$  folgt

$$X_{u^1 u^1} \cdot X_{u^2} = -X_{u^1} \cdot X_{u^1 u^2} = -\frac{1}{2} \mathcal{E}_{u^2},$$

so dass

$$(e_1)_{u^1} \cdot e_2 = \left( \frac{X_{u^1}}{\sqrt{\mathcal{E}}} \right)_{u^1} \cdot \frac{X_{u^2}}{\sqrt{\mathcal{G}}} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}} X_{u^1 u^1} \cdot X_{u^2} = -\frac{1}{2} \frac{\mathcal{E}_{u^2}}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}}.$$

Analog folgt

$$(e_1)_{u^2} \cdot e_2 = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{G}_{u^1}}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}}.$$

Einsetzen liefert (4.167). ■

**Bemerkung 4.66** *Ist die Parametrisierung nicht orthogonal, so ist die Darstellung komplizierter.*

## 4.8 DER SATZ VON GAUSS–BONNET

Wir werden nun Vorbereitungen treffen um den Satz von Gauß-Bonnet zu beweisen. Dieser stellt den Zusammenhang zwischen der geodätischen Krümmung, der Gauß'sche Krümmung und der Eckenanzahl von stückweise glatten, geschlossenen Kurven auf einer Fläche her.

**Stückweise glatte geschlossene Kurven auf Flächen.**

Es sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine reguläre glatte Fläche und  $\mathcal{S} = X(\Omega) = \text{Spur } X \subset \mathbb{R}^3$ .

**Definition 4.67** Eine stetige Kurve

$$c : [0, \ell] \rightarrow \mathcal{S}, \quad \Gamma := c([0, \ell]) = \text{Spur } c \quad (4.168)$$

heißt **stückweise glatt und geschlossen**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- i.  $c(0) = c(\ell)$  (geschlossen);
- ii.  $c : [0, \ell] \rightarrow \mathcal{S}$  injektiv (einfach);
- iii. Die Kurve ist stückweise regulär: es existiert eine Zerlegung  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = \ell$ , so dass die Bögen  $\Gamma_k = \text{Spur } c|_{[t_k, t_{k+1}]} \subset \Gamma \subset \mathcal{S}$ ,  $k = 0, \dots, m$ , regulär sind.
- iv. Die Grenzwerte

$$\lim_{t \nearrow t_k} c'(t) =: c'(t_k^-) \neq 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t \searrow t_k} c'(t) =: c'(t_k^+) \neq 0$$

existieren für alle  $k = 1, 2, \dots, m + 1$  und wir können o.B.d.A. annehmen, dass  $c'(t_k^-) \neq c'(t_k^+)$  ist.

Die Eckpunkte  $c_k := c(t_k) \in \Gamma$  heißen **Ecken** und  $\Gamma_0, \dots, \Gamma_m$  heißen **reguläre Bögen**.

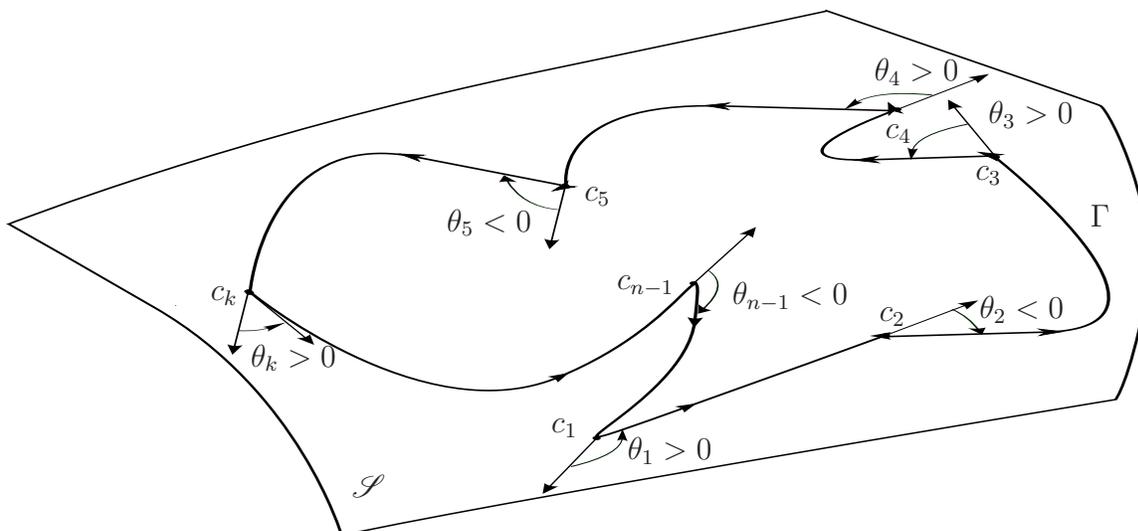


Fig. 4.6

Sei  $|\theta_k| \in ]0, \pi[$  der kleinere Winkel zwischen den Vektoren  $c'(t_k^-)$ ,  $c'(t_k^+)$  und

$$\theta_k := \text{sign} [\det (c'(t_k^-), c'(t_k^+), N(c_k))] |\theta_k| \quad \text{für } |\theta_k| < \pi \quad (4.169)$$

$$= \underbrace{\text{sign} [\det (|c'(t_k - \varepsilon), c'(t_k + \varepsilon), N)]}_{\text{konstant für } 0 < \varepsilon < \varepsilon_1} \pi \quad \text{für Spitze } |\theta_k| = \pi, \quad (4.170)$$

wobei  $N(c_k)$  die Einheitsnormale an die orientierte Fläche  $\mathcal{S}$  in  $c_k$  bezeichne.  $\theta_k$  heißt **Außenwinkel an der Ecke**  $c_k$  (vgl. Fig. 4.5).  $\theta_k$  mißt offensichtlich den Sprung des Argumentes

$$\theta_k := \arg c'(t_k^+) - \arg c'(t_k^-), \quad k = 0, \dots, m. \quad (4.171)$$

Wir nehmen an, dass die Parametrisierung  $X : \Omega \rightarrow \mathcal{S}$  von  $\mathcal{S}$  orientierungstreu und diffeomorph zur Einheitskreisscheibe  $D \subset \mathbb{R}^2$  ist.

Weiter bezeichne  $\varphi_k : [t_k, t_{k+1}] \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion, die jedem  $t \in [t_k, t_{k+1}]$  den positiven Winkel von  $X_{u^1}$  zu  $c'(t)$  zuordnet. Analog zum Umlaufsatz in der Ebene gilt dann:

$$\sum_{k=0}^m [\varphi_k(t_{k+1}) - \varphi_k(t_k)] + \sum_{k=0}^m \theta_k = \pm 2\pi. \quad (4.172)$$

Ist nun  $G \Subset \mathcal{S}$  ein offenes und zusammenhängendes Gebiet, so heißt  $\mathcal{P} = \overline{G}$  **einfach**, wenn  $\mathcal{P}$  homeomorph zur Einheitskreisscheibe  $D$ , und die Grenzkurve  $\Gamma := \partial\mathcal{P} = \text{Spur } c$  stückweise regulär und geschlossen ist.

**Definition 4.68** Man sagt, die Grenze  $\Gamma$  ist (durch  $c$ ) **positiv orientiert**, wenn auf jedem regulären Bogen gilt: Ist  $\{c'(t), c^*(t)\}$  eine positiv orientierte Basis von  $T_{c(t)}$ , so zeigt  $c^*(t)$  nach innen (in Richtung  $\mathcal{P}$ ), d.h.

$$\frac{c'(t) \wedge c^*(t)}{|c'(t)| |c^*(t)|} = N(t)$$

für die Flächennormale  $N$ .

Oder äquivalent: Beim Umlaufen des Gebietes, wenn die Flächennormale  $N$  nach oben zeigt, liegt das Gebiet auf der linken Seite.

Wir erinnern das der Betrag des Vektorproduktes  $|u \wedge v|$  den Flächeninhalt des von den Vektoren  $u, v \in \mathbb{R}^3$  aufgespannten Parallelogramms darstellt (vgl. Lemma 1.27.iii) und ist das Vektorprodukt  $d\sigma := |d^1 X \wedge d^2 X|$  das Volumelement der Fläche  $\mathcal{S}$  (vgl. (3.70)):

$$d\sigma = |d^1 X \wedge d^2 X| = \sqrt{\det G_X} du dv, \\ |\mathcal{S}| := \text{Flächeninhalt } \mathcal{S} = \int_{\Omega} d\sigma = \int_{\Omega} \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} du dv. \quad (4.173)$$

**Satz 4.69 (Gauß–Bonnet; Lokale Version)** Sei  $X : \Omega \rightarrow \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$  eine orthogonale Parametrisierung (also  $\mathcal{F} = 0$ ) einer orientierten Fläche  $\mathcal{S}$ . Es sei  $\Omega$  diffeomorph zur Einheitskreisscheibe, und  $X$  mit der Orientierung von  $\mathcal{S}$  verträglich. Es sei  $\mathcal{P} \subset \mathcal{S} = X(\Omega)$  einfach und  $c : I \rightarrow \mathcal{S}$  nach Bogenlänge  $s \in [0, \ell)$  parametrisiert. Es sei die Grenze  $\Gamma = \partial\mathcal{P} = \text{Spur } c$  durch  $c$  positiv orientiert. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^m \int_{s_k}^{s_{k+1}} \kappa_g(s) ds + \int_{\mathcal{P}} K d\sigma + \sum_{k=0}^m \theta_k = 2\pi, \tag{4.174}$$

wobei  $c_j = c(s_j)$  und  $\theta_k, j = 0, \dots, m$ , die Ecken und die entsprechenden Außenwinkel von  $\Gamma$  sind;  $\kappa_g$  ist die geodätische Krümmung und  $K$  die Gauß'sche Krümmung.

Bevor wir Satz 4.69 beweisen, betrachten wir ein paar Beispiele.

**Beispiel 4.70** Betrachte ein geodätisches Polygon mit  $m$  Ecken auf einer regulären Fläche  $\mathcal{P} \subset \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ .

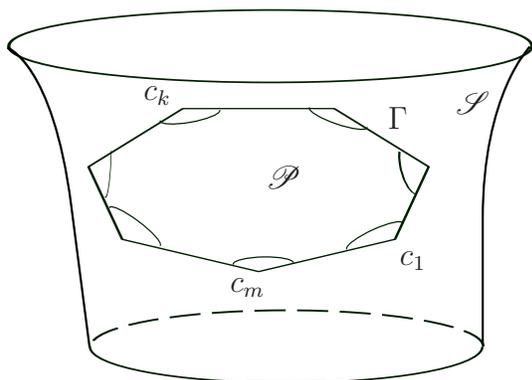


Fig. 4.7

Jede der  $m$  Seiten von  $\mathcal{P}$  sei eine Geodätische,  $K = K_{\mathcal{S}}$  sei die Gauß'sche Krümmung von  $\mathcal{S}$ . Dann gilt

$$\sum_{k=1}^m \beta_k - (m - 2)\pi = \int_{\mathcal{P}} K d\sigma \tag{4.175}$$

wobei  $\beta_1, \dots, \beta_m$  die Innenwinkel des Polygons sind.

In der Tat: Gilt  $\beta_k = \pi - \theta_k$ , wobei  $\theta_k$  der Außenwinkel mit Vorzeichen ist (vgl. Definition 4.67). Da  $\kappa_g = 0$ , ist Formel (4.175) ein Spezialfall der Gauß-Bonnet Gleichung (4.174).

i. Die Übertragung des Satzes aus der ebenen Trigonometrie auf Flächen mit verschwindender Gauß'scher Krümmung  $K \equiv 0$  (Zylinder, Kegel):

$$\sum_{k=1}^m \beta_k = (m - 2)\pi.$$

ii. Wenn  $K \equiv 1$  (z.B. Einheitskugel), dann gilt

$$\sum_{k=1}^m \beta_k - (m - 2)\pi = |\mathcal{P}| = \text{Flächeninhalt } \mathcal{P}.$$

**Beweis des Satzes 4.69:** Es sei  $c = X \circ \omega$ . Nach Satz 4.65 mit (4.166) gilt

$$\kappa_g(s) = \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}} \left\{ \mathcal{G}_{u^1} \frac{d\omega^2}{ds} - \mathcal{E}_{u^2} \frac{d\omega^1}{ds} \right\} + \frac{d\varphi_k}{ds},$$

wobei die  $\varphi_k$  glatte Funktionen sind, die auf  $[s_k, s_{k+1}]$  den orientierten Winkel von  $X_{u^1}$  nach  $c'(s)$  misst. Es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \int_{s_k}^{s_{k+1}} \kappa_g(s) ds &= \sum_{k=0}^m \int_{s_k}^{s_{k+1}} \left[ \frac{\mathcal{G}_{u^1}}{2\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}} \frac{d\omega^2}{ds} - \frac{\mathcal{E}_{u^2}}{2\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}} \frac{d\omega^1}{ds} \right] ds + \sum_{k=0}^m \int_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{d\varphi_k}{ds} ds \\ &= \sum_{k=0}^m \int_{s_k}^{s_{k+1}} \left[ \frac{\mathcal{G}_{u^1}}{2\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}} N_1 + \frac{\mathcal{E}_{u^2}}{2\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}} N_2 \right] ds + \sum_{k=0}^m \int_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{d\varphi_k}{ds} ds, \end{aligned}$$

da  $N(s) = (N_1(s), N_2(s))^T = ((\omega^2(s))', -(\omega^1(s))')^T$  (orthogonal zu dem Tangentenvektor  $\omega(s) = ((\omega^1(s))', (\omega^2(s))')^T$ ). Anwendung des Gauß'schen Satzes in der Ebene (Divergenzsatz; vgl. (4.118)), der Formel für die Gauß'sche Krümmung (4.73), des Umlaufssatzes (4.172) liefern:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \int_{s_k}^{s_{k+1}} \kappa_g(s) ds &= \int_{X^{-1}(\mathcal{P})} \left[ \left( \frac{\mathcal{G}_{u^1}}{2\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}} \right)_{u^1} + \left( \frac{\mathcal{E}_{u^2}}{2\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}} \right)_{u^2} \right] du^1 du^2 \\ &+ \sum_{k=0}^m [\varphi(s_{k+1}) - \varphi(s_k)] = - \int_{X^{-1}(\mathcal{P})} K \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}} du^1 du^2 + 2\pi - \sum_{k=0}^m \theta_k \\ &= - \int_{\mathcal{P}} K d\sigma + 2\pi - \sum_{k=0}^m \theta_k, \end{aligned}$$

da die Kurve positiv orientiert ist. Es folgt (4.174). ■

**Definition 4.71**  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$  sei eine reguläre Fläche,  $G \subset \mathcal{S}$  ein Gebiet. Eine geschlossene Fläche  $\mathcal{P} = \overline{G}$  heißt **regulär** wenn gilt:

- i.  $\mathcal{P}$  ist kompakt;
- ii. Die Grenze  $\partial\mathcal{P}$  zerfällt in eine endliche Vereinigung von einfach geschlossenen, stückweise regulären Kurven:  $\partial\mathcal{P} = \bigcup_{j=1}^{\ell} \text{Spur } c_j$ , wobei  $\text{Spur } c_j \cap \text{Spur } c_k = \emptyset$  für alle  $j \neq k$ .

**Definition 4.72**  $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$  regulär,  $\mathcal{T} = \{T_j\}_{j=1}^n$  heißt **Triangulierung** von  $\mathcal{P}$  wenn:

- i.  $T_k$  Dreieck,  $\bigcup_{j=1}^n T_k = \mathcal{P}$ ;
- ii. Entweder  $T_j \cap T_k = \emptyset$  oder  $T_j \cap T_k \neq \emptyset$  und dann ist  $T_j \cap T_k$  die gemeinsame Kante oder die gemeinsame Ecke von  $T_j, T_k$ .

Es folgt ein technischer Satz, der hier ohne Beweis angeführt ist:

**Satz 4.73** Zu jedem regulären abgeschlossenen Gebiet  $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$  einer regulären Fläche existiert eine Triangulierung. ■

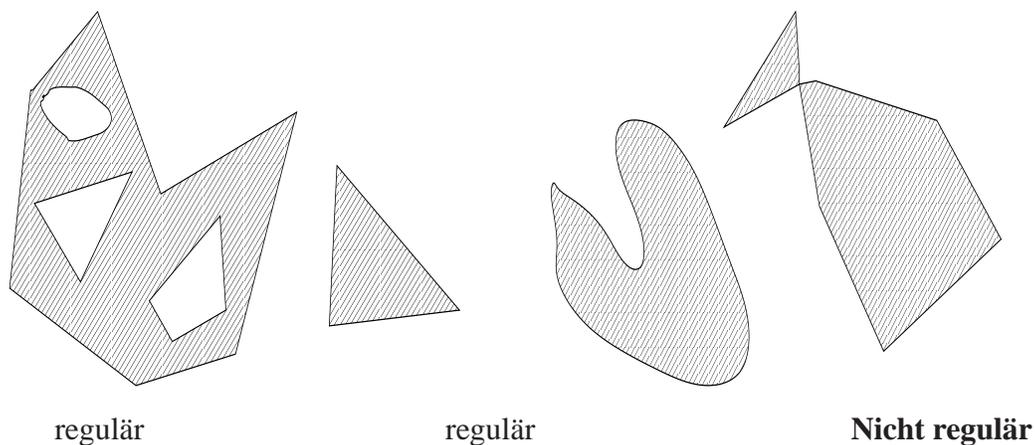


Fig. 4.8

**Definition 4.74**  $\mathcal{T}$  sei eine Triangulierung von  $\mathcal{P}$  und es bezeichne:  $E$  die Anzahl der Ecken,  $K$  die Anzahl der Kanten,  $F$  die Anzahl der Dreiecke. Dann heißt der ganzzahlige Wert

$$\chi(\mathcal{P}) := E - K + F, \quad (4.176)$$

**Euler-Poincaré Charakteristik** von  $\mathcal{P}$ .

**Satz 4.75** Die Euler-Poincaré Charakteristik von  $\mathcal{P}$  ist unabhängig von der Triangulierung  $\mathcal{T}$ . ■

**Definition 4.76**  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$  kompakt und zusammenhängend. Die ganze Zahl

$$g = 1 - \frac{1}{2}\chi(\mathcal{S}),$$

heißt **Geschlecht** von  $\mathcal{S}$ , wobei  $\chi(\mathcal{S})$  Euler-Poincaré Charakteristik ist.

**Beispiel 4.77**  $\chi(\text{einfach}) = 1$ ,  $\chi(\mathcal{S}^2) = 2$ ,  $\chi(\text{Torus}) = 0$ .

Eine Sphäre  $\mathbb{S}_g$  mit  $g$  "Henkeln" hat Geschlecht  $g$  und die Euler-Poincaré Charakteristik ergibt sich zu  $\chi(\mathbb{S}_g) = 2 - 2g$ .

Nächste Satz ist eine **Klassifikation kompakter zusammenhängender Flächen in  $\mathbb{R}^3$**  und wird ohne Beweis angeführt.

**Theorem 4.78** Ist  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$  eine kompakte zusammenhängende geschlossene Fläche, dann nimmt die Euler-Poincaré Charakteristik einen der folgenden Werte an

$$\chi(\mathcal{S}) = 2, 0, -2, \dots, -2k.$$

Kompakte zusammenhängende Flächen  $\mathcal{S}$  und  $\tilde{\mathcal{S}}$  in  $\mathbb{R}^3$  mit gleichem Geschlecht  $g(\mathcal{S}) = g(\tilde{\mathcal{S}})$  (mit gleiche Euler-Poincaré Charakteristik  $\chi(\mathcal{S}) = \chi(\tilde{\mathcal{S}})$ ) sind homeomorph. ■

**Korollar 4.79** Es existieren nur fünf reguläre konvexe Polyeder: die Platonischen Körpern.

**Beweis.**  $P_{n,m}$  ist ein konvexer Polyeder: Jede Fläche ist ein reguläres  $n$ -Eck und es gibt je  $m$  Flächen pro Ecke. Dann gilt

$$nF = mE = 2K, \quad m \geq 3, \quad n \geq 3.$$

Von Theorem 4.78 und Beispiel 4.77 folgt:

$$\chi(P_{n,m}) = \chi(\mathcal{S}^2) = 2 = E - K + F$$

und schließlich,

$$12 = 6\chi(P_{n,m}) = 6(E - K + F) \leq 2mE - 3nF + 6F = F(6 - 3n + 2n) = F(6 - n) \\ \implies n \leq 6 - \frac{12}{F},$$

d.h.  $3 \leq n \leq 5$ . ■

**Bemerkung 4.80** (Technisch). Sei  $\mathcal{S}$  eine reguläre orientierte Fläche,  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  eine Familie von orientierungstreuen Parametrisierungen von  $\mathcal{S}$  und sei  $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$  regulär.

Es existiert eine Triangulierung  $\mathcal{T}$  von  $\mathcal{R}$  in der jedes Dreieck von  $\mathcal{T}$  in einer Koordinatenumgebung der  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  enthalten ist.

Ist jedes Dreieck positiv orientiert, so haben aneinandergrenzende Dreiecke an der gemeinsamen Kante verschiedene Orientierung.

**Erinnerung:** Es sei  $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$  regulär,  $\mathcal{T} = \{\mathcal{T}_k\}_{k=1}^n$  Triangulierung von  $\mathcal{P}$ ,  $T_k \subset X_{\alpha(k)}(U_{\alpha(k)})$ ,  $f$  stetig auf  $\mathcal{P}$ . Dann folgt aus der Flächeninhaltsformel (4.173)

$$\int_{\mathcal{P}} F d\sigma = \sum_{k=1}^n \int_{X^{-1}(T_k)} \varphi_k f \circ X_{\alpha(k)} \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} du dv, \quad (4.177)$$

wobei  $F = f \circ X_{\alpha(k)}$  und  $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$  Zerlegung der Eins ist.

**Satz 4.81 (Gauß–Bonnet; Globale Version)** *Es sei  $\mathcal{S}$  eine orientierte Fläche,  $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$  regulär,  $\partial\mathcal{P} = \bigcup_{j=1}^{\ell} \text{Spur } c_j$ , jede Kurve  $c_1, \dots, c_{\ell}$  sei positiv orientiert.*

*Es seien  $\{\theta_k^j\}_{j=1}^{p_k}$  die Außenwinkel der Kurve  $c_k$ ,  $k = 1, \dots, \ell$ . Dann gilt*

$$\sum_{k=1}^{\ell} \int_{c_k} \kappa_g(s) ds + \int_{\mathcal{P}} K d\sigma + \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{p_k} \theta_k^j = 2\pi\chi(\mathcal{P}). \quad (4.178)$$

**Beweis:** Sei  $\mathcal{T}$  Triangulierung von  $\mathcal{P}$ ,  $T_k \subset X_k(U_k)$ ,  $X_k$  eine orientierungstreue, orthogonale Parametrisierung von  $\mathcal{S}$ . Von Satz 4.69 (Gauß–Bonnet, Lokale Version)

$$\sum_{k=1}^{\ell} \int_{c_k} \kappa_g(s) ds + \int_{\mathcal{P}} K d\sigma + \sum_{k=1}^F \sum_{j=1}^3 \theta_k^j = 2\pi F, \quad (4.179)$$

da die Integrale auf allen “inneren” Kanten zweimal mit entgegengesetzter Orientierung vorkommen, heben sie sich auf. Hier bezeichnet:  $F$  die Zahl der Dreiecke (von  $\mathcal{T}$ ) und  $\{\theta_k^j\}_{j=1}^3$  die Außenwinkel von  $T_k$ . Da  $T_k$  positiv orientiert ist,  $\theta_k^j \in (0, \pi]$  und  $\pi - \theta_k^j = \beta_k^j$ , wobei  $\beta_k^j \in [0, \pi)$  Innenwinkel von  $T_k$  bezeichnet. Es folgt

$$\sum_{k=1}^F \sum_{j=1}^3 \theta_k^j = \sum_{k=1}^F \sum_{j=1}^3 \pi - \sum_{k=1}^F \sum_{j=1}^3 \beta_k^j = 3\pi F - \sum_{k=1}^F \sum_{j=1}^3 \beta_k^j. \quad (4.180)$$

Setze:

- $K_a$  die Zahl der äußeren (Grenz-) Kanten von  $\mathcal{T}$ ,
- $K_i$  die Zahl der inneren Kanten von  $\mathcal{T}$ ,
- $E_a$  die Zahl der äußeren (Grenz-) Ecken von  $\mathcal{T}$ ,
- $E_i$  die Zahl der inneren Ecken von  $\mathcal{T}$ .

Da jede Kurve  $c_k$  geschlossen ist, folgt

$$K_a = E_a.$$

Außerdem ist  $3F = 2K_i + K_a$  (beweisbar mit Induktion). Deshalb gilt mit (4.180)

$$\sum_{k=1}^F \sum_{j=1}^3 \theta_k^j = 2\pi K_i + \pi K_a - \sum_{k=1}^F \sum_{j=1}^3 \beta_k^j. \quad (4.181)$$

Für alle äußeren Ecken

$$E_a = E_{ac} + E_{a\tau},$$

wobei  $E_{ac}$  die Anzahl der Ecken aller Kurven  $c_1, \dots, c_{\ell}$  ist und  $E_{a\tau}$  die Anzahl der wegen Triangulierung künstlich eingeführte Ecken bezeichnet.

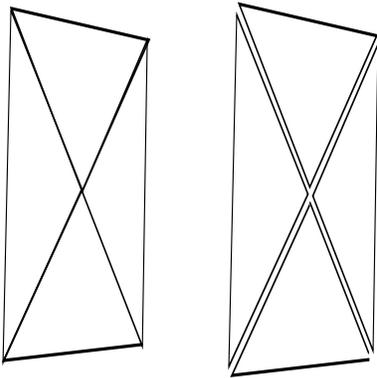


Fig. 4.9

Bei einer inneren Ecke gilt andererseits  $2\pi = \text{Summe der Innenwinkel (an dieser Ecke)}$  und für eine "künstliche" Ecke auf einer Kurve  $c_k$  ist  $\pi = \text{Summe der Innenwinkel}$ . Aus (4.181) folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^F \sum_{j=1}^3 \theta_k^j &= 2\pi K_i + \pi K_a - 2\pi E_i - \pi E_{a\tau} - \left[ \pi E_{ac} - \sum_{k=\ell}^{\ell} \sum_{j=1}^{p_k} \theta_k^j \right] \\ &= 2\pi K_i + 2\pi K_a - 2\pi E_i - \pi E_a - \pi E_{a\tau} - \pi E_{ac} + \sum_{k=\ell}^{\ell} \sum_{j=1}^{p_k} \theta_k^j \\ &= 2\pi K - 2\pi E + \sum_{k=\ell}^{\ell} \sum_{j=1}^{p_k} \theta_k^j, \end{aligned}$$

da  $K_a = E_a$  und (4.179) liefert

$$\sum_{k=1}^{\ell} \int_{c_k} \kappa_g(s) ds + \int_{\mathcal{P}} K d\sigma + \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{p_k} \theta_k^j = 2\pi(E - K + F) = 2\pi\chi(\mathcal{P}). \quad \blacksquare$$

Der nächste Satz verknüpft die Totalkrümmung (metrische Größe) mit der Euler-Poincaré Charakteristik (topologische Invariante):

**Korollar 4.82** *Ist  $\mathcal{S}$  kompakt und orientierbar, so gilt*

$$\int_{\mathcal{S}} K d\sigma = 2\pi\chi(\mathcal{S}). \quad (4.182)$$

**Beweis:** Da  $\mathcal{S}$  kein Rand und keine Ecken hat, verschwinden in der Gauß-Bonnet Formel (4.178) die Summanden mit  $k_g$  und  $\theta_k$  und wir bekommen (4.182).  $\blacksquare$

**Korollar 4.83**  *$\mathcal{S}$  kompakt,  $K \geq 0$ ,  $K \not\equiv 0$  dann ist  $\mathcal{S}$  isomorph zur Einheitsphäre  $\mathcal{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ .*

**Beweis:** Da  $K \geq 0$ ,  $K \not\equiv 0$  folgt  $\chi(\mathcal{S}) > 0$  (vgl. (4.182)) und  $\chi(\mathcal{S}) = 2$  (vgl. Theorem 4.78). Dann  $\mathcal{S} \cong \mathcal{S}^2$ .  $\blacksquare$

**Korollar 4.84** *Es sei  $\mathcal{S}$  orientierbar und  $K \leq 0$ . Dann gilt: Beginnen zwei Geodätische in einem Punkt  $p \in \mathcal{S}$ , so können sie sich nicht in einem Punkt  $q$  wieder treffen, so dass ihre Spuren den Rand eines einfachen Gebiets  $G$  bilden.*

**Beweis:**  $\mathcal{P} = \overline{G}$  einfach,  $c_j = \gamma_j$ ,  $j = 1, 2$ , Geodätische  $k_g = 0$ , dann

$$\int_{\mathcal{P}} K d\sigma + \theta_1 + \theta_2 = 2\pi\chi(\mathcal{P}) = 2\pi$$

(vgl. (4.178)), wobei  $\theta_1 \geq 0$ ,  $\theta_2 \geq 0$  die Außenwinkel in  $p$  und  $q$  bezeichnen. Da  $\theta_j < \pi$  (Eindeutigkeit der Geodätischen) und  $K \leq 0$ , erhalten wir einen Widerspruch.  $\blacksquare$

**Korollar 4.85** Sei  $\mathcal{S}$  kompakt und zusammenhängend,  $K > 0$ ;  $\gamma_1, \gamma_2$  zwei einfach geschlossene Geodätische. Dann  $\text{Spur } \gamma_1 \cap \text{Spur } \gamma_2 \neq \emptyset$ .

**Beweis:** Da  $K > 0$ , folgt  $\mathcal{S} \cong \mathcal{S}^2$ . Falls  $\text{Spur } \gamma_1 \cap \text{Spur } \gamma_2 = \emptyset$ , so  $\text{Spur } \gamma_1 \cap \text{Spur } \gamma_2 = \partial G$  für Gebiet  $G \subset \mathcal{S}$ ,  $G \cong \text{Zylinder}$ . Gauß-Bonnet Satz sichert

$$0 < \int_{\mathcal{S}} K d\sigma = 2\pi\chi(\text{Zylinder}) = 0.$$

Dieser Widerspruch beweist die Behauptung. ■

**Korollar 4.86**  $\mathcal{S}$  kompakt,  $\mathcal{S} \not\cong \mathcal{S}^2$ . Dann gibt es elliptische, parabolische und hyperbolische Punkte auf  $\mathcal{S}$ .

**Beweis:** Der Gauß-Bonnet Satz fordert

$$\int_{\mathcal{S}} K d\sigma \leq 0. \quad (4.183)$$

Andererseits gibt es elliptische Punkte, da  $\mathcal{S}$  kompakt ist; also nach (4.183) auch Punkte mit  $K < 0$  (hyperbolisch), und nach dem Zwischenwertsatz auch parabolische Punkte ( $K = 0$ ). ■

**Korollar 4.87** Sei  $\mathcal{S}$  kompakt und zusammenhängend,  $K \equiv c$  sichert  $K = c > 0$  und  $\mathcal{S} \cong \mathcal{S}^2$ . ■

**Korollar 4.88 Starrheitssatz.**

- i.  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$  kompakt und zusammenhängend,  $K \equiv c$  sichert  $\mathcal{S}$  ist Einheitssphäre.
- ii.  $\mathcal{S}$  nicht kompakt,  $K \equiv 0$  sichert  $\mathcal{S}$  ist Ebene oder Zylinder.
- iii.  $\mathcal{S}$  nicht kompakt,  $K < 0$  ist unmöglich (Hilbert!). ■

## ÜBUNGEN

**Übung 4.1** Es seien  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  und  $\mathcal{S}_3$  reguläre Flächen. Beweisen Sie:

1. Ist  $\varphi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$  eine Isometrie, so ist  $\varphi^{-1} : \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_1$  auch eine Isometrie.
2. Sind  $\varphi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$  und  $\psi : \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_3$  Isometrien, so ist  $\psi \circ \varphi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_3$  eine Isometrie.

Das impliziert, dass die Isometrien einer regulären Fläche in natürlicher Weise eine Gruppe bilden, die Isometriegruppe von  $\mathcal{S}$ .

**Übung 4.2** Betrachten Sie auf  $U = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$  die folgende Parametrisierung der Einheitskugel  $\mathcal{S}^2$ :

$$X : U \rightarrow \mathcal{S}^2, \quad X(\theta, \varphi) := (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)^\top.$$

Es sei  $u = \varphi$  und  $v = \log \tan \left( \frac{\theta}{2} \right)$ .

1. Zeigen Sie:

$$Y(u, v) := \left( \frac{1}{\cosh v} \cos u, \frac{1}{\cosh v} \sin u, \tanh v \right)^\top$$

ist eine Parametrisierung von  $X(U) \subset \mathcal{S}^2$ .

2. Berechnen Sie die Koeffizienten der ersten Fundamentalform von  $Y$ .

3. Zeigen Sie:

$$Y^{-1} : \mathcal{S}^2 \supset X(U) \rightarrow \text{Bild } Y^{-1} \subset \mathbb{R}^2$$

ist eine konforme Abbildung. Diese Abbildung heißt Mercator-Projektion (Weltkarte 1569).

4. Was ist das Bild der Meridiane bzw. der Breitenkreise?

**Übung 4.3** Es sei  $\mathcal{S}$  eine Rotationsfläche. Zeigen Sie, dass die Rotationen um ihre Achse Isometrien von  $\mathcal{S}$  sind.

**Übung 4.4** Zeigen Sie: Die Flächen

$$X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \log u)$$

$$\bar{X}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$$

haben dieselbe Gaußsche Krümmung in den Punkten  $X(u, v)$  und  $\bar{X}(u, v)$ , die Abbildung  $\bar{X} \circ X^{-1}$  ist aber keine Isometrie.

**Übung 4.5** Ist  $X$  eine isotherme Parametrisierung, d.h.  $\mathcal{E} = \mathcal{G} = \lambda^2(u, v)$  und  $\mathcal{F} = 0$ , so zeigen Sie

$$K = -\frac{\Delta(\log \lambda)}{\lambda^2}.$$

Ist  $\mathcal{E} = \mathcal{G} = (u^2 + v^2 + c)^{-2}$  und  $\mathcal{F} = 0$ , so schließen Sie  $K = \text{const} = 4c$ .

**Übung 4.6** Zeigen Sie:

1. Die Christoffel-Symbole der zweiten Art sind symmetrisch bezüglich ihrer unteren Indizes. Was bedeutet das für die Mainardi-Codazzi-Gleichungen?

2. Ist  $\mathcal{F} = 0 = \mathcal{M}$ , und gibt es keine Nabelpunkte, so werden die Mainardi-Codazzi-Gleichungen zu:

$$\mathcal{L}_v = \mathcal{E}_v H,$$

$$\mathcal{N}_u = \mathcal{G}_u H.$$

**Übung 4.7** Betrachten Sie die stereographische Projektion  $\pi : \mathcal{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die einen Punkt  $p = (x, y, z)$  der Sphäre  $\mathcal{S}^2$  ohne den Nordpol  $N = (0, 0, 2)$  auf den Schnittpunkt der  $(x, y)$ -Ebene mit der Geraden abbildet, die  $N$  und  $p$  verbindet (siehe Übung 3.2).

1. Benutzen Sie die stereographische Projektion um zu zeigen daß die Späre lokal konform zur Ebene ist.
2. Warum ist die Späre lokal konform zur Ebene und nicht global?

**Übung 4.8** Beweise das Isometrien einer reguläre Fläche in natürlicher weise eine Gruppe bilden: Für reguläre Flächen  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  und  $\mathcal{S}_3$  ist die Inverse  $\varphi^{-1} : \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_1$  von die Isometrie  $\varphi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$  und die Komposition  $\psi \circ \varphi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_3$  von die Isometrien  $\varphi$  und  $\psi : \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_3$  auch Isometrien.

**Übung 4.9** Zeigen Sie das Rotationen um eigene Achse von Rotationsfläche Isometrien sind.

**LITERATURVERZEICHNIS**

- [Be] L. Bers, *Riemann Surfaces*. New York University, Institute of Mathematical Sciences, 1958.
- [DMM] R. Duduchava, D.Mitrea, M.Mitrea, Differential operators and boundary value problems on surfaces, *Mathematische Nachrichten* 2006.
- [Gr] M. Grüter, *Vorlesungen Elementare Differentialgeometrie*, WS 2003, <http://www.num.uni-sb.de/rjasanow/duduch/>
- [Ca] J. Casey, *Exploring curvature*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1996. xvi+291 pp. ISBN: 3-528-06475-7.
- [Car] M. P. do Carmo, *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*. Vieweg-Studium, 55 Mathematik, Aufbaukurs Mathematik. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1992.
- [CCL] S. S. Chern, W. H. Chen, K. S. Lam. *Lectures on differential geometry*. Series on University Mathematics. 1. Singapore, World Scientific. x, 356 p., 1999. ISBN: 981-02-4182-8.
- [Jo] J.Jost, *Differentialgeometrie und Minimalflächen*. Springer-Lehrbuch. Berlin, Springer-Verlag, 1994.
- [Ku] W. Kühnel, *Differentialgeometrie. Kurven, Flächen, Mannigfaltigkeiten*. Vieweg Studium, Aufbaukurs Mathematik. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 2003. ISBN: 3-528-17289-4. English translation: *Differential geometry. Curves, surfaces, manifolds*. Student Mathematical Library, 16. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. ISBN: 0-8218-2656-5.
- [Os] R. Osserman, *Geometrie des Universums. Von der Göttlichen Komödie zu Riemann und Einstein* (Translated from the 1995 English edition). Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1997. xvi+188 pp. ISBN: 3-528-06902-3.
- [RKP] H. Reckziegel, M. Kriener, K. Pawel, *Elementare Differentialgeometrie mit Maple*. With CD-ROM. Wiesbaden, Vieweg, 1998.