발산정리 그리고 회전정리

① 미분연산자[Dfferential operator] 델[Del]

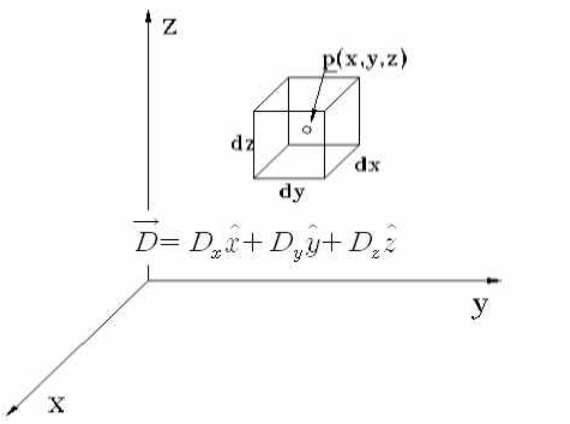
벡터해석에서 이용되는 ‘델(Del)’은 ‘나블라(Nabla)’라고도 하는데 미분계산을 수행하기 위한 미분연산자를 의미한다. 기호로는 ▽를 사용하는데 어원 ‘나블라’는 형상이 비슷한 ‘하프(Harp)’를 의미하는 그리스어에서 유래되었다고 한다. 미분계산자 델의 정의식은 다음과 같다.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$$

이러한 미분계산자는 발산, 경사, 회전 등의 벡터계산에 대한 결과식을 간단하게 표현하기 위하여 이용된다.

② 발산[Divergence] 정리

발산 정리는 임의의 체적에서 체적을 구성하는 폐곡면 내부에서의 벡터 $\vec{D}$와 폐곡면을 구성하는 표면 벡터 $\vec{S}$와의 내적 적분을 체적의 크기로 나누는 개념을 의미하는데 발산 정리의 유도과정을 정리하면 다음과 같다.




3차원 공간에서 주어진 한 점 $p(x,y,z)$에서 벡터 $\vec{D}$가 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$$\vec{D} = D_x\hat{x} + D_y\hat{y} + D_z\hat{z}$$

주어진 점 $p(x,y,z)$를 중심으로 하고 한 변의 길이가 $dx$, $dy$, $dz$인 그림과 같은 미소 정육면체를 폐곡면으로 생각하면 정육면체의 6개의 표면에서 벡터 $\vec{D}$의 내적적분은 다음과 같이 표

현할 수 있다.

$$\oint_s \vec{D} \cdot \vec{ds} = \int_{전} + \int_{후} + \int_{좌} + \int_{우} + \int_{상} + \int_{하}$$

먼저 $+x$방향의 $\int_{전}$에 대한 적분을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_{전} &= \vec{D}_{전} \cdot \vec{ds}_{전} \\ &= \vec{D}_{전} \cdot dydz\,\hat{x} \end{aligned}$$

주어진 점 $p(x,y,z)$에서 $\frac{1}{2}dx$만큼 떨어진 미소면적 $dy\,dz$의 크기를 가지는 미소표면 $\vec{ds}_{전}$의 전체 면에서 $+x$방향 벡터의 성분이 $\vec{D}_{전,x}$으로 일정하다고 가정하면 내적계산의 결과는 다음과 같이 근사화할 수 있다.

$$\cong D_{전,x}\,dydz$$

여기서 $D_{전,x}$는 점 $p(x,y,z)$로부터 $+x$방향으로 $dx/2$만큼 떨어져 위치하므로 $a = \frac{1}{2}dx$만큼 떨어진 위치에서 함수를 급수전개하는 테일러 급수를 적용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} D_{전,x} &\cong D_x + \left(D_x\text{의 } x\text{에 대한 변화율} * \frac{dx}{2}\right) \\ &\cong D_x + \frac{\partial D_x}{\partial x}\frac{dx}{2} \end{aligned}$$

따라서 $+x$방향의 $\int_{전}$에 대한 적분결과는 다음과 같다.

$$\int_{전} \cong \left(D_x + \frac{\partial D_x}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dydz$$

동일한 방법으로 $-x$방향의 $\int_{후}$에 대한 적분을 정리하면 다음과 같다.

$$\int_{후} \cong \overrightarrow{D}_{후} \cdot \overrightarrow{ds}_{후}$$
$$\cong \ \overrightarrow{D}_{후} \cdot \left(dydz(-)\hat{x}\right)$$

주어진 점 $p(x,y,z)$에서 $(-)\frac{1}{2}dx$만큼 떨어진 미소표면 $\overrightarrow{ds}_{후}$의 전체 면에서 $-x$방향 벡터의 성분이 $(-)\overrightarrow{D}_{후,x}$로 일정하다고 가정하면 내적계산의 결과는 다음과 같이 근사화할 수 있다.

$$\cong \ (-)D_{후,x} \ \ dydz$$

여기서 $D_{후,x}$는 다음과 같이 정리된다.

$$D_{후,x} \ \cong \ D_x + \left(D_x\text{의 } x\text{에대한 변화율 } \times \ (-)\frac{dx}{2}\right)$$
$$\cong \ D_x \ - \ \frac{\partial D_x}{\partial x}\frac{dx}{2}$$

$-x$방향의 $\int_{후}$에 대한 적분을 정리하면 다음과 같다.

$$\int_{후} \cong \left(-D_x + \frac{\partial D_x}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz$$

적분 $\int_{전} + \int_{후}$의 계산 결과를 정리하면 다음과 같다.

$$\int_{전} + \int_{후} \cong \left(D_x + \frac{\partial D_x}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz + \left(-D_x + \frac{\partial D_x}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz$$
$$\int_{전} + \int_{후} \cong \frac{\partial D_x}{\partial x}\,dxdydz$$

같은 방법으로 $\int_{좌} + \int_{우}$, $\int_{상} + \int_{하}$를 계산하면 다음과 같다.

$$\int_{좌} + \int_{우} \cong \frac{\partial D_y}{\partial y}\, dxdydz$$

$$\int_{상} + \int_{하} \cong \frac{\partial D_z}{\partial z}\, dxdydz$$

결과적으로 $\oint_s \overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{전} + \int_{후} + \int_{좌} + \int_{우} + \int_{상} + \int_{하}$에 대한 결과를 정리하면 다음과 같다.

$$\oint_s \overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{ds} \cong \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right) dxdydz$$

$$\oint_s \overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{ds} \cong \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right) dv$$

결과식에서 정육면체의 미소 체적 $dv = (dxdydz)$가 작아질수록 결과값의 정확도는 높아진다고 판단할 수 있다. 미소 체적의 크기를 작게하기 위하여 $dv$를 0으로 하는 극한 $\lim_{dv \to 0}$을 취하고 결과식을 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{\oint_s \overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{ds}}{dv} \cong \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\lim_{dv \to 0} \frac{\oint_s \overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{ds}}{dv} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

다음으로 미분연산자 델의 정의식을 이용하여 식을 표현하면 다음과 같다.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$$

벡터 $\overrightarrow{D}$는 $\overrightarrow{D} = D_x\hat{x} + D_y\hat{y} + D_z\hat{z}$이므로 $div\overrightarrow{D} = \nabla \cdot \overrightarrow{D}$를 정리하면 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \overrightarrow{D} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right) \cdot \left(D_x\hat{x} + D_y\hat{y} + D_z\hat{z}\right)$$

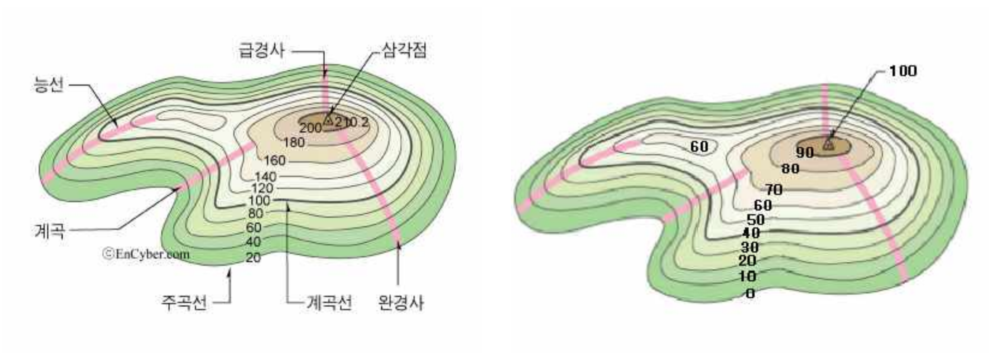
$$\nabla \cdot \overrightarrow{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

발산 정리의 최종 결과식을 정리하면 다음과 같다.

$$\lim_{dv \to 0} \frac{\oint_s \overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{ds}}{dv} = \overrightarrow{D}\text{의 발산} = div\overrightarrow{D} = \nabla \cdot \overrightarrow{D}$$

벡터 $\overrightarrow{D}$의 발산은 미소 체적의 크기를 매우 작게 할 때 미소체적의 내부로부터 밖으로 나가는 벡터 $\overrightarrow{D}$와 폐곡면을 구성하는 면의 법선벡터 $\vec{s}(=|\vec{s}|\hat{n})$와의 내적계산의 적분을 의미한다.

③ 경사[Gradient] 정리




그림과 같은 지도의 등고선을 살펴보자. 등고선의 간격이 좁아지는 곳은 급경사를 이루고 있는 곳을 의미한다. 만약에 정상에서 물을 부었다고 가정하면 물은 매 순간 가장 가파른 급경사를 찾아서 흘러가게 될 것이다. 주어진 해석영역에서 등고선에 수직하는 방향 즉 가장 경사가 가파르게 변하는 방향과 크기를 찾아주는 것이 경사(傾斜, gradient) 정리이다.

전자기학에서 사용하는 경사의 개념을 정리하면 다음과 같다. 정상의 위치 즉 삼각점에서 전압(Voltage) 혹은 전위(Potential) $+100\,V$를 인가하고 외부경계면에서의 전위를 0을 위치시키면 등고선과 같은 형태의 등전위 분포가 구성된다. 등전위 선상의 모든 점에서 전위값이 가장 가파르게 변하는 방향으로의 벡터를 $\overrightarrow{E}$라고 할 때 이러한 벡터장을 구해주는 것이 경사(구배, 기울기)이다.

전기장 내에서 단위전하가 가지는 위치에너지가 전위이다. 임의로 주어진 한 점 $B$에서 다른 한 점 $A$로 단위 양전하를 이동시키기 위해서는 외부에서 일을 해주어야 한다. 하지만 반대의

경우라고하면 일을 할 필요가 없다. 일을 하지 않는 경우를 이용하여 전위차관련 수식을 정의하게 된다.

$$\text{전위차} = V = -\int_{\text{시점}}^{\text{종점}} \overrightarrow{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V_{AB} = V_A - V_B = -\int_B^A \overrightarrow{E} \cdot d\vec{l}$$

즉, $B$에서 $A$점으로 단위전하를 이동하는 경우에는 외부에서 일을 하지만 전위차 $V_{AB} = V_A - V_B$의 조건에서는 일을 하지 않는다는 것을 의미한다. 해석영역에서의 전위 $V$에 대한 최대변화율(수직방향) 즉 전장의 세기 $\overrightarrow{E}$를 계산하는 방법은 다음과 같이 정의된다.

$$\overrightarrow{E} = -\frac{dV}{dl} \mid_{\max} \hat{n}$$

여기서 $l$은 등전위 사이의 거리이고 max는 등전위의 거리가 최소인 경우이며 법선벡터 $\hat{n}$는 등전위면에 수직이며 전위가 가장 빠르게 변하는 방향을 가리키는 단위벡터이다.

벡터 $\overrightarrow{E}$의 크기는 전위 $V$의 위치에 따른 최대변화와 같고 방향은 등전위면의 전위가 감소하는 수직방향이 된다. $-\frac{dV}{dl} \mid_{\max}$는 $d\vec{l}$이 $\hat{n}$방향에 있을 때 발생하므로 다음과 같이 표현된다.

$$\overrightarrow{E} = -\frac{dV}{dl} \mid_{\max} \hat{n} = -\frac{dV}{dN} \hat{n}$$

벡터장 $\overrightarrow{E}$와 전위 $V$에 대한 관계로부터 다음과 같은 경사 계산식이 주어진다.

$$\overrightarrow{E} = -grad\, V = -\nabla V$$

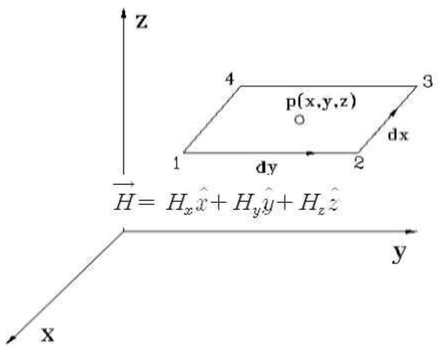
미분연산자를 이용하여 표현된 경사의 계산식을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E} &= -\nabla V = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right) V \\ &= -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}\right) \end{aligned}$$

벡터해석에서 전위 $V$와 같은 스칼라 장에서 벡터 $\vec{E}$와 같은 벡터장을 계산하는 벡터계산 방법이 '경사' 정리이다.

④ 회전[Curl] 정리

회전은 미소 폐곡선에서의 벡터 $\vec{H}$의 내적을 폐곡선으로 만들어지는 미소면적의 크기로 나눈 것을 의미한다. 회전 정리에 대한 유도과정을 정리하면 다음과 같다.




3차원 공간에서 주어진 한점 $p(x,y,z)$에서 벡터 $\vec{H}$가 다음과 같이 표현된다고 가정하자.

$$\vec{H} = H_x\hat{x} + H_y\hat{y} + H_z\hat{z}$$

주어진 점 $p(x,y,z)$를 중심으로 하고 한 변의 길이가 $dx$, $dy$인 그림과 같은 미소 정육각형으로 폐곡선을 구성하여 회전(Curl)의 개념을 정리하면 다음과 같다.

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = (\vec{H}\cdot d\vec{l})_{1-2} + (\vec{H}\cdot d\vec{l})_{2-3} + (\vec{H}\cdot d\vec{l})_{3-4} + (\vec{H}\cdot d\vec{l})_{4-1}$$

먼저 $+y$방향의 $(\vec{H}\cdot d\vec{l})_{1-2}$을 계산하기 위하여 $\frac{1}{2}dx$떨어진 $+y$방향의 $d\vec{l}_{1-2}$ 선적분 구간에서 벡터의 $+y$성분이 $H_{y,1-2}$로 일정하다고 가정하면 다음과 같이 근사화할 수 있다.

$$(\vec{H}\cdot d\vec{l})_{1-2} \cong H_{y,1-2}\,dy$$

여기서 $H_{y,1-2}$는 점 $p(x,y,z)$로부터 $+x$방향으로 $dx/2$만큼 떨어져 위치하므로 $a = \frac{1}{2}dx$만큼 떨

어진 위치에서 함수를 급수전개하는 테일러 급수를 적용하여 정리하면 다음과 같다.

$$H_{y,1-2} \cong H_y + \left( H_y \text{의 } x \text{에 대한 변화율} \times (\frac{dx}{2}) \right)$$

$$H_{y,1-2} \;\; \cong \;\; H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x}(\frac{dx}{2})$$

결과적으로 $(\vec{H} \cdot d\vec{l})_{1-2}$는 다음과 같이 정리된다.

$$(\vec{H} \cdot d\vec{l})_{1-2} \cong \left( H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{dx}{2} \right) dy$$

동일한 방법으로 $-y$방향의 $(\vec{H} \cdot d\vec{l})_{3-4}$을 계산하면 다음과 같다.

$$(\vec{H} \cdot d\vec{l})_{3-4} \cong H_{y,3-4}\,(-)dy$$

여기서 $\vec{H}_{y,3-4}$는 다음과 같이 정리된다.

$$H_{y,3-4} \cong H_y + \left( H_y \text{의 } x \text{에 대한 변화율} \times (-\frac{dx}{2}) \right)$$

$$H_{y,3-4} \cong H_y - \frac{\partial H_y}{\partial x}(\frac{dx}{2})$$

그러므로 $(\vec{H} \cdot d\vec{l})_{3-4}$는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$(\vec{H} \cdot d\vec{L})_{3-4} \cong (-)\left( H_y - \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{dx}{2} \right) dy$$

동일한 방법으로 $-x$방향의 $(\vec{H} \cdot d\vec{l})_{2-3}$을 계산하면 다음과 같다.

$$(\vec{H} \cdot d\vec{l})_{2-3} \cong H_{x,2-3}\,(-)dx$$

여기서 $(\vec{H} \cdot d\vec{l})_{2-3}$는 다음과 같이 정리된다.

$$H_{x,2-3} \;\cong\; H_x + \left(H_x\text{의 } y\text{에대한 변화율} \times (\frac{dy}{2})\right)$$

$$H_{x,2-3} \;\cong\; H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y}(\frac{dy}{2})$$

그러므로

$$(\overrightarrow{H} \cdot d\overrightarrow{L})_{2-3} \cong -\left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx$$

마지막으로 $+x$방향의 $(\overrightarrow{H} \cdot d\vec{l})_{4-1}$을 정리하면 다음과 같다.

$$(\overrightarrow{H} \cdot d\vec{l})_{4-1} \cong H_{x,4-1}\, dx$$

그러므로 $(\overrightarrow{H} \cdot d\vec{l})_{4-1}$는 다음과 같이 정리된다.

$$H_{x,4-1} \cong H_x + \left(H_x\text{의} y\text{에대한변화율} \times (-\frac{dy}{2})\right)$$

$$H_{x,4-1} \;\cong\; H_x - \frac{\partial H_x}{\partial y}(\frac{dy}{2})$$

그러므로 결과는 다음과 같다.

$$(\overrightarrow{H} \cdot d\overrightarrow{L})_{4-1} \cong \left(H_x - \frac{\partial H_x}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx$$

주어진 적분결과를 모두 합하여 정리하면 다음과 같다.

$$\oint_l \overrightarrow{H} \cdot d\vec{l} = (\overrightarrow{H} \cdot d\vec{l})_{1-2} + (\overrightarrow{H} \cdot d\vec{l})_{2-3} + (\overrightarrow{H} \cdot d\vec{l})_{3-4} + (\overrightarrow{H} \cdot d\vec{l})_{4-1}$$

$$\cong \left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy - \left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx - \left(H_y - \frac{\partial H_y}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\,dy$$

$$+\left(H_x - \frac{\partial H_x}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx$$

$$\cong 2\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}\ \frac{dx}{2}\ dy\right) - 2\left(\frac{\partial H_x}{\partial y}\ \frac{dy}{2}\ dx\right)$$

$$\oint_l \overrightarrow{H} \cdot d\vec{l} \ \cong \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) dxdy$$

계산의 정확도를 높이기 위하여 미소면적에 대한 극한을 취하면 다음과 같다.

$$\lim_{dx\,dy \to 0} \frac{\oint \overrightarrow{H} \cdot d\vec{l}}{dxdy} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

미분연산자 델(Del)을 이용하여 결과식을 표현하면 다음과 같다.

$$curl\,\overrightarrow{H} = \nabla \times \overrightarrow{H} = \lim_{ds \to 0} \frac{\oint \overrightarrow{H} \cdot d\vec{l}}{ds}$$

지금까지의 결과는 $x-y$평면에서 주어진 폐곡선에서 유도된 결과이다. 폐곡선이 $x-y$평면에서 주어졌기 때문에 결과의 방향이 다음과 같이 $\hat{z}$방향을 가리킨다는 것을 알 수 있다.

$$curl\,\overrightarrow{H} = \nabla \times \overrightarrow{H} = \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

3차원 공간 임의의 폐곡선에 대하여 계산하면 $y-x$평면에서의 결과 그리고 $z-x$평면에서의 결과를 모두 계산하여 합해야 한다. 3차원 공간의 임의의 폐곡선에서 계산된 회전정리의 결과식을 정리하면 다음과 같다.

$$curl\ \overrightarrow{H} = \nabla \times \overrightarrow{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

위의 회전 정리의 결과식은 다음과 같은 행렬식의 형태로도 표현이 가능하다.

$$curl\overrightarrow{H} \ = \ \nabla \times \overrightarrow{H} \ = \begin{vmatrix} \hat{x}, & \hat{y}, & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}, & \dfrac{\partial}{\partial y}, & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ H_x, & H_y, & H_z \end{vmatrix}$$