| 제 2 장 |

점화관계와 알고리즘

숫자 1, 2, 3, 4로 이루어진 모든 네 자리수를 나열하는 문제처럼 어떤 특별한 조건을 만족하는 경우를 모두 나열해야 할 때가 많다. 이 때 각 경우를 만드는 절차를 잘 구성하지 못하면 어떤 경우는 중복되고 어떤 경우는 빠뜨리게 되어 근본적으로 문제를 해결할 수 없게 된다. 어떤 문제를 해결하기 위한 절차나 과정, 순서를 알고리즘(algorithm)이라 한다. 미국 스탠포드 대학의 Knuth 교수는 알고리즘 특징으로 다음 다섯 가지를 지적하였다.

1. 유한성(finiteness) : 알고리즘은 유한 번 과정 안에 끝나야 한다.
2. 명확성(definteness) : 알고리즘의 각 단계는 명확하게 정의되어야 한다.
3. 입력(input) : 알고리즘이 시작되기 위해서는 초기에 어떤 특정한 값을 입력해야 한다.
4. 출력(output) : 알고리즘은 입력에 영향을 받는 몇 개의 출력이 있어야 한다.
5. 유효성(effectiveness) : 알고리즘의 모든 작업은 정확해야 하며 유한시간에 끝낼 수 있어야 한다.

제1절 점화관계

수열 $\{a_n\}$에서 처음 몇 항의 값이 주어지고 a_n이 그것보다 앞선 항으로 나타내지면 수열의 모든 항의 값을 구할 수 있다. 이 절에서는 주어진 조건을 만족하는 경우의 수 a_n을 점화식으로 나타내고, 이를 이용하여 a_n을 구하는 방법에 대하여 살펴본다.

예제 2.1.1 n명을 일렬로 세우는 방법의 수를 a_n이라 하자. a_n을 a_{n-1}로 나타내어라. 또 $n=6$까지 a_n의 값을 계산하여라.

풀이≫ 분명히 $a_1=1$이다. n명을 일렬로 세우기 위해서는 n명 중에 한 명을 맨 앞자리에 세우고 나머지 $(n-1)$명을 그 뒤에 일렬로 세우면 된다. n명 중에 한 명을 맨 앞자리에 세우는 방법의 수는 n이고 나머지 $(n-1)$명을 그 뒤에 일렬로 세우는 방법의 수는 a_{n-1}이므로 곱의 법칙에 의하여 $a_n=na_{n-1}$이다. 따라서 $n=6$까지 a_n의 값은 다음 표와 같다.

n	1	2	3	4	5	6
$a_n=na_{n-1}$	1	$2\cdot1=2$	$3\cdot2=6$	$4\cdot6=24$	$5\cdot24=120$	$6\cdot120=720$

표 2.1.1

□

문제 2.1.1

서로 다른 n개의 공을 서로 다른 세 상자에 넣는 방법의 수를 a_n이라 하자. a_n을 a_{n-1}로 나타내어라. 또 $n=6$까지 a_n의 값을 계산하여라.

정의 2.1.1 수열 $\{a_n\}$에서 a_n을 그것보다 앞선 항 a_{n-1}, a_{n-2}, $\cdots$을 써서 나타낸 식

을 **점화식**이라 한다. 예를 들어 다음과 같은 식은 모두 점화식이다.

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_r a_{n-r} \qquad (c_i\text{는 상수})$$
$$a_n = c a_{n-1} + f(n) \qquad (c\text{는 상수})$$
$$a_n = a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \cdots + a_{n-1} a_1$$
$$a_{n,m} = a_{n-1,m} + a_{n-1,m-1}$$

처음의 몇 항이 적절하게 주어져 있으면 점화식을 이용하여 수열의 값을 구할 수 있다. 이처럼 점화식을 계산하는데 꼭 필요한 처음 몇 항을 이 점화식의 **초기조건**이라 한다.

예를 들어, 점화식 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$로 나타내어지는 수열 $\{a_n\}$은 a_1과 a_2의 값이 주어지면 $\{a_n\}$의 모든 항이 결정된다. 그러므로 a_1과 a_2의 값이 이 점화식의 초기조건이다.

예제 2.1.2 1과 2로 이루어진 n자리수 중 1이 연속으로 나오지 않는 수의 개수를 a_n이라 할 때, a_n에 대한 점화식을 구하여라.

풀이>> 1이 연속으로 나오지 않는 한 자리수는 1, 2이므로 $a_1=2$, 두 자리수는 12, 21, 22뿐이므로 $a_2=3$이다. 일반적으로 처음의 숫자에 따라 다음과 같은 두 가지 경우가 있다.

① **처음의 숫자가 1인 경우 :**

1이 연속으로 나올 수 없기 때문에 두 번째의 숫자는 2이며 나머지는 1이 연속으로 나오지 않는 $(n-2)$자리수이다. 그러므로 1이 연속으로 나오지 않으며 처음의 숫자가 1인 경우의 수는 a_{n-2}이다.

② **처음의 숫자가 2인 경우 :**

처음의 숫자를 제외한 나머지는 1이 연속으로 나오지 않는 $(n-1)$자리수이므로 그 개수는 a_{n-1}이다.

①과 ②는 동시에 일어나지 않으므로 합의 법칙에 의하여

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}\ (n \geq 3), \quad a_1=2, a_2=3$$

이다. □

문제 2.1.2

철수가 계단을 오르는데 한 걸음에 한 계단이나 두 계단씩 오른다고 한다. 이런 방법으로 철수가 n개의 계단을 오를 수 있는 서로 다른 방법의 수를 a_n이라 할 때, a_1, a_2, a_3의 값과 a_n에 대한 점화식을 구하여라.

예제 2.1.3 평면 위에 항상 서로 교차하는 n개의 직선이 만드는 영역의 수를 a_n이라 할 때 a_n에 대한 점화식을 구하여라. (단, 어느 세 직선도 동시에 한 점에서 만나지 않는다.)

풀이≫ 아래 그림에서 알 수 있듯이 $a_1=2, a_2=4, a_3=7$이다.

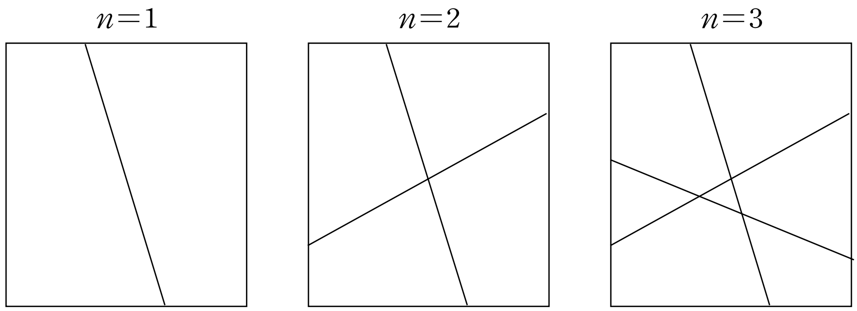


그림 2.1.1

평면에 그어진 $(n-1)$개의 직선이 만드는 영역의 수는 정의에 의하여 a_{n-1}이다. 이제 여기에 직선을 하나 더 그으면 그 직선이 다른 $(n-1)$개의 직선을 만날 때마다 새로운 한 영역이 생기고 마지막 만나는 직선을 지나서는 하나의 영역이 더 생기므로 결국 n개의 새로운 영역이 생긴다. 따라서

$$a_1=2,\quad a_n=a_{n-1}+n \quad (n\geq 2)$$

이다. □

문제 2.1.3

두 원은 항상 서로 다른 두 점에서 만나는 n개의 원이 평면 위에 있다. 이 n개의 원이 만드는 영역의 수를 a_n이라 할 때 a_n에 대한 점화식을 구하여라. (단, 어느 세 원도 동시에 한 점에서 만나지 않는다.)

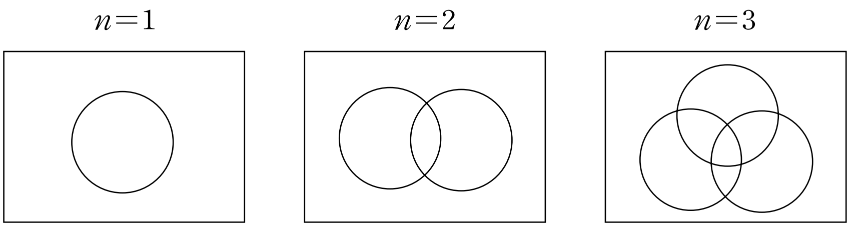


그림 2.1.2

예제 2.1.4 **(하노이 탑)** 크기가 서로 다른 n개의 원판이 아래 그림과 같이 크기 순서대로 막대기 A에 끼워져 있다. 다른 두 개의 막대기를 이용하여 이 n개의 원판을 다른 막대기 C로 옮길 때 필요한 최소 이동 회수를 a_n이라 하자. a_1, a_2의 값과 a_n에 대한 점화식을 구하여라. (단, 한번에 한 개의 원판만을 옮길 수 있으며 어떤 원판 위에도 그것보다 큰 원판을 놓지 못한다.)

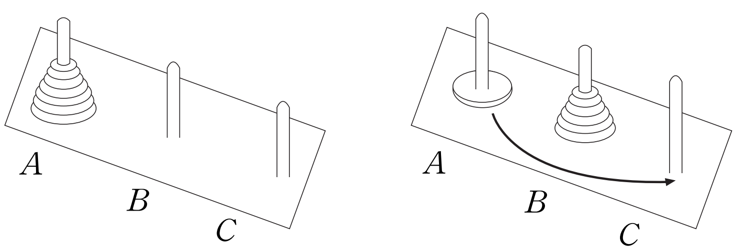


그림 2.1.3

풀이>> 명백하게 $a_1=1$이다. $n=2$라면 위의 작은 원판을 B로 옮긴 다음 남은 큰 원판을 C로 옮기고 다시 B에 있는 원판을 C에 있는 원판 위에 놓으면 되므로 $a_2=3$이다. 일반적으로 다음과 같이 세 단계로 나누어 생각할 수 있다.

① A에 있는 가장 큰 원판만을 제외하고 나머지 $n-1$개의 원판을 B로 옮긴다. 이 때 필요한 최소 이동 회수는 a_{n-1}이다.

② A에 남은 가장 큰 원판을 C로 옮긴다. 물론 필요한 이동 회수는 1이다.
③ B에 있는 $n-1$개의 원판을 C로 옮긴다. 이 때 최소 이동 회수는 a_{n-1}이다.

그러므로 n개의 원판을 다른 막대기로 옮길 때 필요한 최소 이동 회수 a_n은

$$a_1=1,\quad a_n=2a_{n-1}+1 \quad (n\geq 2)$$

이다. □

문제 2.1.4

갓 태어난 토끼 암수 한 쌍은 새로 태어난지 2달 뒤부터 매달 두 쌍의 암수 토끼를 낳는다고 하자. 철수는 시장에서 갓 태어난 토끼 암수 한 쌍을 사왔다. n달 후에 철수가 갖고 있는 토끼 쌍의 수를 a_n이라 할 때 a_n에 대한 점화식을 구하여라. (단, 죽는 것은 고려하지 않는다.)

예제 2.1.5 1과 2로 이루어진 n자리수 중 1이 연속으로 3번 이상은 나오지 않는 수의 개수를 a_n이라 할 때 a_n에 대한 점화식을 구하여라.

풀이>> 1이 연속으로 3번 이상 나오지 않는 한 자리수는 1, 2이고 두 자리수는 11, 12, 21, 22이며 세 자리수는

$$112, 121, 211, 122, 212, 221, 222$$

이므로 $a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=7$이다. 일반적으로 다음과 같이 세 경우로 나누어 생각할 수 있다.

① **처음의 숫자가 2인 경우 :**
처음의 숫자를 제외한 나머지는 1이 연속으로 3번 이상 나오지 않는 $(n-1)$자리수이며 그런 수의 개수는 a_{n-1}이다.

② **처음 두 자리가 12인 경우 :**
처음 두 자리를 제외한 나머지는 1이 연속으로 3번 이상 나오지 않는 $(n-2)$자리수이며 그런 수의 개수는 a_{n-2}이다. 그러므로 1이 연

속으로 3번 이상 나오지 않으며 처음 두 자리가 12인 경우의 수는 a_{n-2}이다.

③ **처음 세 자리가 112인 경우 :**

처음 세 자리를 제외한 나머지는 1이 연속으로 3번 이상 나오지 않는 $(n-3)$자리수이며 그런 수의 개수는 a_{n-3}이다. 따라서, 이 경우의 수는 a_{n-3}이다.

위의 세 경우는 동시에 일어나지 않으므로 합의 법칙에 의하여

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3} \quad (n\geq 4),\quad a_1=2,\quad a_2=4,\quad a_3=7$$

이다. □

문제 2.1.5

값이 각각 100원, 200원, 400원인 귤, 감, 사과가 있다. 하루에 한 개만 사기로 할 때, $100n$원으로 살 수 있는 방법의 수를 a_n이라고 하자. a_n에 대한 점화식을 구하여라. 예를 들어, 300원으로는 (귤, 귤, 귤), (귤, 감), (감, 귤)과 같이 살 수 있으므로 $a_3=3$이다.

예제 2.1.6 $x_1, x_2, \cdots, x_n$을 실수라 하자. 이 n개의 수의 곱은 계속하여 두 항을 곱하여 계산할 수 있다. 예를 들어 $n=3$이라면

$$\begin{array}{llll}(x_1x_2)x_3, & x_1(x_2x_3), & (x_1x_3)x_2, & x_1(x_3x_2)\\ (x_2x_1)x_3, & x_2(x_1x_3), & (x_2x_3)x_1, & x_2(x_3x_1)\\ (x_3x_1)x_2, & x_3(x_1x_2), & (x_3x_2)x_1, & x_3(x_2x_1)\end{array}$$

의 12가지 방법이 있다.

(1) 위처럼 n개의 수를 계속하여 두 항씩을 곱하여 계산할 수 있는 방법의 수를 a_n이라 할 때 a_n에 대한 점화식을 구하여라.

(2) 위 (1)처럼 n개의 수를 곱할 때 곱에 나타나는 수의 순서가 $x_1, x_2, \cdots, x_n$이 되도

록 하는 방법의 수를 b_n이라 할 때 b_n에 대한 점화식을 구하여라. 예를 들어 $n=3$이면 $(x_1x_2)x_3$, $x_1(x_2x_3)$의 둘뿐이므로 $b_3=2$이다.

풀이>> (1) $n=1$이면 x_1 하나뿐이므로 $a_1=1$, $n=2$이면 x_1x_2, x_2x_1 둘뿐이므로 $a_2=2$이다. 또 $n=3$이면 위의 예에서 $a_3=12$이다. 일반적으로 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$을 이용하여 위처럼 만들 수 있는 곱의 방법의 수는 a_{n-1}이다. 이제 이 곱에 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어 x_n을 곱하여 보자.

① **x_n이 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$의 곱의 양 끝에 올 경우 :**

$x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$의 곱 왼쪽 또는 오른쪽 끝에 오는 2가지 경우가 있다. 예를 들어 x_1, x_2의 곱 x_1x_2의 양 끝에 x_3가 오는 경우는 $x_3(x_1x_2)$, $(x_1x_2)x_3$의 둘 밖에 없다. 따라서, 이 경우의 수는 $2a_{n-1}$이다.

② **x_n이 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$의 곱의 양 끝에 오지 않을 경우 :**

$x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$의 곱에는 $(n-2)$번의 곱셈이 있다. x_n은 이 곱셈의 양쪽 인수의 왼쪽 또는 오른쪽에 위치할 수 있으므로 모두 $4(n-2)$의 경우가 있다. 예를 들어 x_3가 x_1, x_2의 곱 x_1x_2의 양 끝에 오지 않는 경우, x_3는 x_1x_2에 포함되어 있는 곱셈의 양쪽 인수 x_1과 x_2의 왼쪽 또는 오른쪽에 위치하는

$$(x_3x_1)x_2, \qquad (x_1x_3)x_2, \qquad x_1(x_3x_2) \qquad x_1(x_2x_3)$$

뿐이고 이런 경우의 수는 $4(3-2)=4$이다. 따라서, 이 경우의 수는 $4(n-2)a_{n-1}$이다.

위의 두 경우는 동시에 일어나지 않으므로 각각 합의 법칙에 의하여

$$a_n=2a_{n-1}+4(n-2)a_{n-1}=(4n-6)a_{n-1} \quad (n\geq 2), \quad a_1=1$$

이다.

(2) 분명히 $b_1=1$, $b_2=1$이고 $n=3$이면 위의 예에서 보듯이 $b_3=2$이다. 일반적으로 $x_1, x_2, \cdots, x_n$의 곱에 포함되어 있는 $(n-1)$번의 곱셈 중 마지막 곱셈을 생각하여 보자. 이 곱셈의 앞부분이 i개의 수의 곱으로 이루어져 있다면 b_i 경우가 있고 곱셈의 뒷부분은 $n-i$개의 수의 곱으로 이루어지므로 b_{n-i} 경우가 있다. 예를 들어 $(x_1(x_2x_3)(x_4x_5))(x_6(x_7x_8))$에서 마지막 곱셈의 앞부분 $(x_1(x_2x_3)(x_4x_5))$은 5개의 수의 곱으로 이루어져 있고 곱셈

의 뒷부분 $(x_6(x_7x_8))$은 3개의 수의 곱으로 이루어져 있다. 그러므로 n개의 수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$으로 곱을 이루는 경우의 수 b_n은

$$b_n = b_1b_{n-1} + b_2b_{n-2} + \cdots + b_ib_{n-i} + \cdots + b_{n-2}b_2 + b_{n-1}b_1 \quad (n \geq 2)$$

이다. □

문제 2.1.6

위의 예제 2.1.6의 (2)에 의하여

$$b_4 = b_1b_3 + b_2b_2 + b_3b_1 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$$

이고

$$b_5 = b_1b_4 + b_2b_3 + b_3b_2 + b_4b_1 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 14$$

이다. 수의 순서가 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5이고 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5로 곱을 이루는 14가지 방법을 모두 구하여라.

예제 2.1.7 n개의 똑같은 공을 k개의 서로 다른 상자에 넣을 때 각 상자에 2 이상 4 이하의 공이 있도록 넣는 방법의 수를 $a_{n,k}$라 하자. $a_{n,k}$에 대한 점화식을 구하여라.

풀이》 $a_{2,1} = a_{3,1} = a_{4,1} = 1$이고 $n \neq 2, 3, 4$이면 $a_{n,1} = 0$이다.

n개의 똑같은 공을 k개의 서로 다른 상자에 넣을 때 첫 번째 상자에 넣는 공의 수에 따라 다음과 같이 세 가지 경우로 나누어진다.

① 첫 번째 상자에 2개의 공을 넣는다면 나머지 $k-1$상자에 $n-2$개의 공을 넣어야 하고 이런 방법의 수는 $a_{n-2,k-1}$이다.

② 첫 번째 상자에 3개의 공을 넣는다면 나머지 $k-1$상자에 $n-3$개의 공을 넣어야 하고 이런 방법의 수는 $a_{n-3,k-1}$이다.

③ 첫 번째 상자에 4개의 공을 넣는다면 나머지 $k-1$상자에 $n-4$개의 공을 넣어야 하고 이런 방법의 수는 $a_{n-4,k-1}$이다.

위의 세 경우는 동시에 일어나지 않으므로 합의 법칙에 의하여

$$a_{n,k}=a_{n-2,k-1}+a_{n-3,k-1}+a_{n-4,k-1} \qquad (n\geq 5, k\geq 2)$$

이다. 예를 들어

$$a_{6,2}=a_{4,1}+a_{3,1}+a_{2,1}=1+1+1=3$$
$$a_{7,3}=a_{5,2}+a_{4,2}+a_{3,2}=2+1+0=3$$

이다. □

문제 2.1.7

n개의 서로 다른 공에서 k개를 뽑는 방법의 수를 $a_{n,k}$라 하자. $a_{n,k}$에 대한 점화식을 구하여라.

지금까지 여러 가지 상황에서 a_n을 점화식으로 나타내는 방법을 알아보았다. 이제 주어진 점화식과 초기조건을 이용하여 일반항 a_n을 구하는 방법에 대하여 알아보자.

정의 2.1.2 $c_1, c_2, \cdots, c_k$가 상수이고 $c_k\neq 0$일 때 다항식

$$t^k-c_1t^{k-1}-c_2t^{k-2}-\cdots-c_{k-1}t-c_k$$

를 점화식

$$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\cdots+c_ka_{n-k} \quad (n\geq k)$$

의 **특성다항식**이라 한다.

예를 들어 점화식 $a_n=-2a_{n-1}+3a_{n-2}$의 특성다항식은

$$C(t)=t^2+2t-3$$

이다.

정리 2.1.3

$c_1, c_2, \cdots, c_k$가 상수이고 $c_k \neq 0$일 때 a_n에 관한 점화식

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \quad (n \geq k) \tag{1.1}$$

를 생각하여 보자.

(1) 두 수열 $\{x_n\}, \{y_n\}$이 점화식 (1.1)를 만족하면 그 일차결합인 수열

$$\{px_n + qy_n\} \qquad (p, q\text{는 상수})$$

도 점화식 (1.1)을 만족한다.

(2) 점화식 (1.1)의 특성다항식

$$t^k - c_1 t^{k-1} - c_2 t^{k-2} - \cdots - c_{k-1} t - c_k$$

의 한 근을 r이라 하면 수열 $\{r^n\}$은 점화식 (1.1)을 만족한다.

【증명】 (1) 수열 $\{x_n\}, \{y_n\}$이 점화식 (1.1)을 만족한다고 하자. 그러면

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$$
$$y_n = c_1 y_{n-1} + c_2 y_{n-2} + \cdots + c_k y_{n-k}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} & px_n + qy_n \\ &= p(c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}) + q(c_1 y_{n-1} + c_2 y_{n-2} + \cdots + c_k y_{n-k}) \\ &= c_1(px_{n-1} + qy_{n-1}) + c_2(px_{n-2} + qy_{n-2}) + \cdots + c_k(px_{n-k} + qy_{n-k}) \end{aligned}$$

이므로 수열 $\{px_n + qy_n\}$도 점화식 (1.1)을 만족한다.

(2) r을 (1.1)의 특성다항식의 한 근이라 하자. 그러면

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_{k-1} r - c_k = 0$$

이고 양변에 r^{n-k}를 곱하여 이항하면

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \cdots + c_{k-1} r^{n-k+1} + c_k r^{n-k}$$

이다. 그러므로 수열 $\{r^n\}$은 점화식 (1.1)을 만족한다. □

앞에서 주어진 (1.1)의 특성다항식의 근이 서로 다른 근 $r_1, r_2, \cdots, r_k$를 갖는다고 하자. 그러면 정리 2.1.3의 (2)에 의하여 수열

$$\{r_1^n\},\ \{r_2^n\},\ \cdots,\ \{r_k^n\}$$

은 점화식 (1.1)을 만족하고 다시 정리 2.1.3의 (1)에 의하여

$$z_n = p_1 r_1^n + p_2 r_2^n + \cdots + p_k r_k^n$$

로 정의된 수열 $\{z_n\}$도 점화식 (1.1)을 만족한다. 이제 점화식 (1.1)의 초기조건 $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}$의 값을 이용하여 $p_1, p_2, \cdots, p_k$에 관한 일차연립방정식

$$\begin{aligned} p_1 r_1^0 + p_2 r_2^0 + \cdots + p_k r_k^0 &= a_0 \\ p_1 r_1^1 + p_2 r_2^1 + \cdots + p_k r_k^1 &= a_1 \\ &\vdots \\ p_1 r_1^{k-1} + p_2 r_2^{k-1} + \cdots + p_k r_k^{k-1} &= a_{k-1} \end{aligned} \tag{1.2}$$

을 세우고 이 연립방정식을 풀어 $p_1, p_2, \cdots, p_k$의 값을 구하면 점화식 (1.1)의 일반항 $z_n = p_1 r_1^n + p_2 r_2^n + \cdots + p_k r_k^n$을 구할 수 있다.

한편, (1.2)의 계수행렬의 행렬식은

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_k \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \cdots & r_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le k} (r_i - r_j) \neq 0$$

이므로 연립방정식 (1.2)는 유일한 해를 갖는다.

예제 2.1.8 다음 점화식을 풀어라.

(1) $a_n = 2a_{n-1},\ \ a_0 = 3$

(2) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ \ a_0 = 0,\ \ a_1 = 1$

풀이>> (1) 이 점화식의 특성다항식은 $t-2$이고 그 근은 2이므로

$$a_n = c \cdot 2^n \quad (c\text{는 상수})$$

이다. 초기조건 $a_0=3$을 이용하면 $a_0=c\cdot 2^0=3$이므로 $c=3$이다. 따라서

$$a_n = 3\cdot 2^n \quad (n \geq 0)$$

이다.

(2) 이 점화식의 특성다항식은 t^2-t-1이고 그 근은

$$t=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

이므로

$$a_n = p_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + p_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad (\text{단, } p_1, p_2\text{는 상수})$$

이다. 초기조건 $a_0=0, a_1=1$을 이용하면

$$a_0 = p_1 + p_2 = 0$$

$$a_1 = p_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + p_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

이고 이 연립방정식을 풀면 $p_1=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $p_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ 이다. 따라서

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad (n \geq 0)$$

이다. □

문제 2.1.8

다음 점화식을 풀어라.

(1) $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}$, $a_0=3$

(2) $a_n + 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$, $a_0=0$, $a_1=1$

정리 2.1.4

$c_1, c_2, \cdots, c_k$가 상수이고 $c_k \neq 0$일 때 a_n에 관한 점화식

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \quad (n \geq k) \tag{1.3}$$

의 특성다항식을 $C(t)$라고 하자. $C(t)$의 한 근 r이 m차 다중근이라 하자. 즉,

$$C(t) = (t-r)^m q(t) \quad (q(t)\text{는 } q(r) \neq 0\text{인 다항식})$$

이다.

(1) m개의 수열

$$\{r^n\}, \quad \{nr^n\}, \quad \cdots, \quad \{n^{m-1}r^n\}$$

은 각각 점화식 (1.3)을 만족한다.

(2) $b_n = (p_0 + p_1 n + p_2 n^2 + \cdots + p_{m-1} n^{m-1}) r^n$로 정의된 수열 $\{b_n\}$도 점화식 (1.3)을 만족한다. (단, $p_0, p_1, \cdots, p_{m-1}$은 상수)

【증명】 (1) 특성다항식 $C(t)$의 한 근 r이 이중근을 갖는다면 $C(r) = C'(r) = 0$ 이고 정리 2.1.3에 의해 $\{r^n\}$은 점화식 (1.3)을 만족한다. 한편

$$\begin{aligned}
& nr^n - c_1(n-1)r^{n-1} - c_2(n-2)r^{n-2} - \cdots - c_k(n-k)r^{n-k} \\
&= r^{n-k}(nr^k - c_1(n-1)r^{k-1} - c_2(n-2)r^{k-2} - \cdots - c_k(n-k)) \\
&= r^{n-k}(nC(r) + c_1 r^{k-1} + 2c_2 r^{k-2} + \cdots + (k-1)c_{k-1}r + kc_k) \\
&= r^{n-k}(nC(r) + rC'(r) - kC(r)) = 0
\end{aligned}$$

이므로 수열 $\{nr^n\}$은 점화식 (1.3)을 만족한다.

비슷한 방법으로 r이 특성다항식 $C(t)$의 m차 다중근일 때도 수열

$$\{r^n\}, \quad \{nr^n\}, \quad \cdots, \quad \{n^{m-1}r^n\}$$

은 각각 점화식 (1.3)을 만족함을 보일 수 있다.

(2) 수열

$$\{r^n\}, \quad \{nr^n\}, \quad \cdots, \quad \{n^{m-1}r^n\}$$

이 각각 점화식 (1.3)을 만족하므로 정리 2.1.3의 (1)에 의하여

$$
\begin{aligned}
b_n &= p_0 r^n + p_1 n r^n + \cdots + p_{m-1} n^{m-1} r^n \\
&= (p_0 + p_1 n + p_2 n^2 + \cdots + p_{m-1} n^{m-1}) r^n
\end{aligned}
$$

도 점화식 (1.3)을 만족한다. □

예제 2.1.9 다음 점화식을 풀어라.

$$a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

풀이>> 이 점화식의 특성다항식은 $C(t) = t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2$이고 $t = -1$은 $C(t)$의 중근이므로

$$a_n = (p_0 + p_1 n)(-1)^n$$

이다. 초기조건 $a_0 = 0$, $a_1 = 1$을 이용하면

$$
\begin{aligned}
a_0 &= p_0 = 0 \\
a_1 &= -p_0 - p_1 = 1
\end{aligned}
$$

이고 이 연립방정식을 풀면 $p_0 = 0$, $p_1 = -1$이므로

$$a_n = n(-1)^{n+1} \qquad (n \geq 0)$$

이다. □

문제 2.1.9

다음 점화식을 풀어라.

$$a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

예제 2.1.10 다음 점화식을 풀어라.

$$a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 0, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 1$$

풀이>> 이 점화식의 특성다항식은 $C(t)=t^2+t+1$이고 그 근은

$$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \quad \omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

이므로

$$a_n=p_1\omega^n+p_2(\omega^2)^n=p_1\omega^n+p_2\omega^{2n}$$

이다. 초기조건 $a_0=1$, $a_1=1$을 이용하면

$$a_0=p_1+p_2=1$$
$$a_1=p_1\omega+p_2\omega^2=1$$

이다. $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$을 이용하여 이 연립방정식을 풀면 $p_1=-\omega$, $p_2=-\omega^2$이고

$$a_n=-\omega^{n+1}-\omega^{2(n+1)}$$

이다. 이를 간단히 하면

$$a_n=\begin{cases} 1 & (n=3k,\ 3k+1\ \text{꼴}) \\ -2 & (n=3k+2\ \text{꼴}) \end{cases}$$

이다. □

문제 2.1.10

다음 점화식을 풀어라.

$$a_n+a_{n-2}=0, \quad a_0=0, \quad a_1=1$$

지금까지

$$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\cdots+c_ka_{n-k} \quad (n\geq k,\ c_k\neq 0)$$

형태의 **선형동차점화식**을 살펴보았다. 이제 n에 관한 함수 $f(n)$이 첨가된

$$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\cdots+c_ka_{n-k}+f(n) \quad (n\geq k,\ c_k\neq 0)$$

형태의 **비동차점화식**을 살펴보자.

정리 2.1.5

$c_1, c_2, \cdots, c_k$가 상수이고 $c_k \neq 0$일 때 선형동차점화식

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \qquad (n \geq k) \tag{1.4}$$

과 비동차점화식

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + f(n) \qquad (n \geq k) \tag{1.5}$$

을 생각해보자.

(1) 수열 $\{x_n\}$이 (1.4)를 만족하고 $\{q_n\}$이 (1.5)를 만족하는 특수한 수열이라면 수열

$$\{x_n + q_n\}$$

도 (1.5)를 만족함을 보여라.

(2) 역으로 (1.5)를 만족하는 임의의 수열은

$$\{x_n + q_n\}$$

의 형태로 쓸 수 있다. (단, $\{x_n\}$은 (1.4)를 만족하는 일반해이고 $\{q_n\}$은 (1.5)를 만족하는 특수해이다.)

【증명】

(1) $\{x_n\}$과 $\{q_n\}$이 각각 점화식 (1.4)와 (1.5)를 만족하는 수열이라 하자. 그러면

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$$
$$q_n = c_1 q_{n-1} + c_2 q_{n-2} + \cdots + c_k q_{n-k} + f(n)$$

이고 이 두 식을 더하면

$$x_n + q_n = c_1(x_{n-1} + q_{n-1}) + c_2(x_{n-2} + q_{n-2}) + \cdots + c_k(x_{n-k} + q_{n-k}) + f(n)$$

이므로 수열 $\{x_n + q_n\}$은 점화식 (1.5)를 만족한다.

(2) $\{q_n\}$을 (1.5)를 만족하는 특수해라고 하자. $\{y_n\}$이 점화식 (1.5)를 만족하는 임의의 수열이라 하면

$$y_n = c_1 y_{n-1} + c_2 y_{n-2} + \cdots + c_k y_{n-k} + f(n)$$
$$q_n = c_1 q_{n-1} + c_2 q_{n-2} + \cdots + c_k q_{n-k} + f(n)$$

이고

$$y_n - q_n = c_1(y_{n-1} - q_{n-1}) + c_2(y_{n-2} - q_{n-2}) + \cdots + c_k(y_{n-k} - q_{n-k})$$

이다. 그러므로 수열 $\{y_n - q_n\}$은 점화식 (1.4)의 해이다. 따라서,

$$y_n - q_n = x_n, \quad \text{즉} \quad y_n = x_n + q_n$$

이다. □

정리 2.1.5에 의하여 비동차점화식

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + f(n) \qquad (n \geq k,\ c_k \neq 0)$$

의 특수해를 찾아내면 선형동차점화식의 일반해를 더하여 위의 비동차점화식의 일반해를 구할 수 있다. 다음 표는 여러 가지 형태의 $f(n)$에 대한 a_n의 특수해를 나타낸 것이다.

$f(n)$	a_n의 특수해
d	B
dn	$B_1 n + B_0$
dn^2	$B_2 n^2 + B_1 n + B_0$
cd^n	Bd^n

표 2.1.1

예제 2.1.11 다음 점화식을 풀어라.

(1) $a_n + 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 1, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 1$

(2) $a_n + a_{n-1} - 2a_{n-2} = 1, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 1$

풀이>> (1) 점화식 $a_n+5a_{n-1}+6a_{n-2}=0$의 특성다항식은 $t^2+5t+6=(t+3)(t+2)$ 이고 그 근은 $t=-2,\ -3$이므로 일반해 x_n은

$$x_n=c_1(-2)^n+c_2(-3)^n$$

이다. 위 점화식의 특수해 q_n을 $q_n=B$라 하면 $q_n=q_{n-1}=q_{n-2}=B$이므로

$$B+5B+6B=12B=1$$

이 되어 $q_n=\frac{1}{12}$이다. 따라서 주어진 점화식의 일반해 a_n은

$$a_n=x_n+q_n=c_1(-2)^n+c_2(-3)^n+\frac{1}{12}$$

이다. 초기조건 $a_0=1,\ a_1=1$을 이용하면

$$a_0=c_1+c_2+\frac{1}{12}=1$$
$$a_1=-2c_1-3c_2+\frac{1}{12}=1$$

이고 이 연립방정식을 풀면 $c_1=\frac{11}{3},\ c_2=-\frac{11}{4}$이므로

$$a_n=\frac{11}{3}(-2)^n-\frac{11}{4}(-3)^n+\frac{1}{12}$$

이다.

(2) 점화식 $a_n+a_{n-1}-2a_{n-2}=0$의 그 특성다항식은 $t^2+t-2=(t-1)(t+2)$ 이고 그 근은 $t=1,\ -2$이므로 점화식 $a_n+a_{n-1}-2a_{n-2}=0$의 일반해는

$$x_n=c_1(1)^n+c_2(-2)^n$$

이다. 위 점화식의 특수해 q_n을 $q_n=B$라 하면 $q_n=q_{n-1}=q_{n-2}=B$이므로

$$B+B-2B=0=1$$

이 되어 모순이다. 이럴 경우 n의 차수를 1만큼 높여 $q_n=B_1n+B_0$라 하면

$$(B_1n+B_0)+(B_1(n-1)+B_0)-2(B_1(n-2)+B_0)=3B_1=1$$

이 되어 $q_n=\frac{1}{3}n$이다. 따라서 주어진 점화식의 일반해 a_n은

$$a_n = x_n + q_n = c_1 + c_2(-2)^n + \frac{1}{3}n$$

이다. 초기조건 $a_0 = 1$, $a_1 = 1$을 이용하면

$$a_0 = c_1 + c_2 = 1$$

$$a_1 = c_1 - 2c_2 + \frac{1}{3} = 1$$

이다. 이 연립방정식을 풀면 $c_1 = \frac{8}{9}$, $c_2 = \frac{1}{9}$이므로

$$a_n = \frac{8}{9} + \frac{1}{9}(-2)^n + \frac{1}{3}n$$

이다. □

문제 2.1.11

다음 점화식을 풀어라.

(1) $a_n + 3a_{n-1} = n$, $a_0 = 1$

(2) $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = n$, $a_0 = a_1 = 1$

이제 비동차점화식에서 $f(n)$이 d^n의 꼴인 경우를 알아보자.

예제 2.1.12 다음 점화식을 풀어라.

(1) $a_n - 5a_{n-1} = 2^n$, $a_0 = 1$

(2) $a_n - 5a_{n-1} = 5^n$, $a_0 = 1$

풀이≫ (1) 점화식 $a_n - 5a_{n-1} = 0$의 특성다항식은 $t-5$이고 그 근은 $t=5$이므로 일반해 x_n은

$$x_n = c_1 \cdot 5^n$$

이다. 위 점화식의 특수해 q_n을 $q_n = B \cdot 2^n$이라 하면

$$B \cdot 2^n - 5B \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

이 되어 $B=-\frac{2}{3}$이고 $q_n=-\frac{2}{3}\cdot 2^n$이다. 따라서 주어진 점화식의 일반해 a_n은

$$a_n=x_n+q_n=c_1\cdot 5^n-\frac{2}{3}\cdot 2^n$$

이다. 초기조건 $a_0=1$을 이용하면

$$a_0=c_1-\frac{2}{3}=1$$

이다. 이 방정식을 풀면 $c_1=\frac{5}{3}$이므로

$$a_n=\frac{5}{3}\cdot 5^n-\frac{2}{3}\cdot 2^n$$

이다.

(2) 위 (1)에서 점화식 $a_n-5a_{n-1}=0$의 일반해 x_n은

$$x_n=c_1\cdot 5^n$$

임을 알았다. 위 점화식의 특수해 q_n을 $q_n=c\cdot 5^n$이라 하면 $a_n-5a_{n-1}=0$의 일반해 x_n과 비동차점화식의 특수해 q_n이 같은 형태가 되어 비동차점화식의 일반해를 구할 수 없다. 이럴 경우 예제 2.1.11의 (2)에서 보듯이 n을 곱해 $q_n=Bn5^n$이라 하면

$$Bn5^n-5B(n-1)5^{n-1}=5^n$$

이다. 곧, $B=1$이고 $q_n=n5^n$이 되어 주어진 점화식의 일반해 a_n은

$$a_n=x_n+q_n=c_1\cdot 5^n+n5^n$$

이다. 초기조건 $a_0=1$을 이용하면

$$a_0=c_1=1$$

이고

$$a_n=5^n+n5^n=(1+n)5^n$$

이다. □

문제 2.1.12

다음 점화식을 풀어라.

(1) $a_n - 3a_{n-1} = 2^n, \quad a_0 = 1$

(2) $a_n - 3a_{n-1} = 3^n, \quad a_0 = 1$

점화식의 계수가 상수가 아니면 이제까지 살펴본 방법을 직접 적용할 수 없다. 이럴 때 상수계수를 갖는 점화식으로 바꾸는 방법에 대하여 알아보도록 하자.

예제 2.1.13 다음 점화식을 상수계수인 점화식으로 바꾸어라.

(1) $(n+1)a_{n+1} + (n-1)a_n + 2 = 0$

(2) $a_n = na_{n-1} + n(n-1)a_{n-2}$

(3) $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}$

풀이>> (1) 주어진 점화식의 양변에 n을 곱하면

$$n(n+1)a_{n+1} + n(n-1)a_n + 2n = 0$$

이고 여기서 $b_n = n(n-1)a_n$이라 하면 위의 점화식은

$$b_{n+1} + b_n + 2n = 0$$

이 된다.

(2) $b_n = \dfrac{a_n}{n!}$이라 두면 주어진 점화식은

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$$

이 된다.

(3) 양변에 $\log_2$를 취한 다음 $b_n = \log_2 a_n$이라 하면 주어진 점화식은

$$2b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$$

이 된다. □

문제 2.1.13

다음 점화식을 상수계수를 가지는 점화식으로 바꾸어라.

(1) $a_n=\dfrac{n+1}{n+2}a_{n-1}$

(2) $n(n+1)a_{n+1}=na_n+a_{n-1}$

(3) $a_n=\sqrt{a_{n-1}^2+a_{n-2}^2}$

(4) $a_n=\dfrac{3}{2+a_{n-1}}$ (힌트 : $a_n=\dfrac{b_{n-1}}{b_n}$ 로 놓아라.)

연습문제 2.1

1 은행에 연이율이 5%로 1000원을 저금할 때 연복리로 계산된 n년 후의 원리합계를 a_n이라 하자. a_n에 대한 점화식을 구하여라.

2 테니스 단식 시합에 $2n$명이 참가하였다. 이 $2n$명을 두 명씩 짝짓는 방법의 수를 a_n이라 할 때, a_n에 대한 점화식을 구하여라.

3 철수가 계단을 오르는데 한 걸음에 한 계단이나 두 계단, 또는 세 계단씩 오른다고 한다. 이런 방법으로 철수가 n개의 계단을 오를 수 있는 서로 다른 방법의 수를 a_n이라 할 때, a_n에 대한 점화식을 구하여라.

4 숫자 1, 2, $\cdots$, 9로 이루어진 n자리수 중에서 1의 개수가 짝수인 수의 개수를 a_n이라 하자. (단, 1이 없는 수는 1의 개수가 짝수인 수이다.)

(1) a_1, a_2의 값을 구하여라.

(2) a_n에 대한 점화식을 구하여라.

5 다음 물음에 답하여라.

(1) $2\times n$판을 n개의 도미노(2×1판 또는 1×2판)로 덮을 수 있는 방법의 수를 a_n이라 할 때 a_n에 대한 점화식을 구하여라.

(2) 한 종류의 1×1타일과 검은 색, 흰 색 두 종류의 1×2타일로 $1\times n$판을 덮을 수 있는 방법의 수를 b_n이라 할 때 b_n에 대한 점화식을 구하여라.

6 1부터 n까지의 자연수 중에서 k개의 수를 뽑는데 연속된 수가 없도록 뽑는 방법의 수를 $a_{n,k}$라 한다.

(1) $a_{n,1}$, $a_{2,2}$, $a_{3,2}$, $a_{4,2}$의 값을 각각 구하여라.

(2) $a_{n,k}$에 대한 점화식을 구하여라.

7 숫자 1, 2, 3으로 이루어진 n자리수를 중에서 짝수 개의 1과 짝수 개의 2를 포함하고 있는 수의 개수를 a_n, 짝수 개의 1과 홀수 개의 2를 포함하고 있는 수의 개수를 b_n, 홀수 개의 1과 짝수 개의 2를 포함하고 있는 수의 개수를 c_n이라 하자.

(1) $n=3$까지 a_n, b_n, c_n의 값을 각각 구하여라.

(2) a_n을 수열 $\{b_n\}$의 항, $\{c_n\}$의 항, 그리고 a_n보다 앞선 항으로 나타내어라.

(3) b_n을 수열 $\{c_n\}$의 항으로 나타내어라.

(4) c_n을 수열 $\{b_n\}$의 항으로 나타내어라.

(5) 위 (1)-(4)를 이용하여 a_4, a_5의 값을 계산하여라.

8 다음과 같이 점화식으로 나타내어지는 수열의 처음 다섯 항을 구하여라.

(1) $a_n=2a_{n-1}+1,\quad a_0=1$

(2) $a_n=a_{n-2}+a_{n-1},\quad a_0=a_1=1$

(3) $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3},\quad a_1=2,\quad a_2=4,\quad a_3=7$

(4) $na_n+(n-1)a_{n-1}=2^n,\quad a_0=1,\quad a_1=2$

9 다음 점화식을 풀어라.

(1) $a_n=a_{n-1}+2,\quad a_0=3$

(2) $a_n=2a_{n-1},\quad a_0=6$

(3) $a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2},\quad a_0=a_1=1$

(4) $a_n=-2a_{n-2}-a_{n-4},\quad a_0=0,\quad a_1=1,\quad a_2=2,\quad a_3=3$

(5) $a_n=2a_{n-1}-a_{n-2},\quad a_0=a_1=2$

(6) $a_n=4a_{n-1}-4a_{n-2},\quad a_0=1, a_1=4$

10 다음 점화식을 풀어라.

(1) $a_n=2a_{n-1}+1,\quad a_0=1$

(2) $a_n=3a_{n-1}-4n,\quad a_0=1$

(3) $a_n=3a_{n-1}+3\cdot 2^n,\quad a_0=1$

(4) $a_n=3a_{n-1}-4n+3\cdot 2^n,\quad a_0=1$

11 다음 점화식을 풀어라.

(1) $na_n+(n-1)a_{n-1}=2^n,\quad a_0=1$

(2) $a_n=\dfrac{1}{1+a_{n-1}},\quad a_0=1$

(3) $a_n=a_{n-1}^2-2,\quad a_0=3$

(4) $a_n=-na_{n-1}+n!,\quad a_0=1$

12 피보나치 수열 $\{F_n\}$에 대하여 다음 등식이 성립함을 보여라.

(1) 피보나치수열에서 연속된 두 항은 서로 소이다. 즉, $(F_n, F_{n+1})=1$

(2) $F_1+F_2+\cdots+F_n=F_{n+2}-1$

(3) $F_1^2+F_2^2+\cdots+F_n^2=F_nF_{n+1}$

(4) $\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \qquad (n\geq 2)$

13 피보나치수열 $\{F_n\}$에 대하여 다음 등식이 성립함을 보여라.

(1) $F_2+F_4+\cdots+F_{2n}=F_{2n+1}-1$

(2) $F_1F_2+F_2F_3+\cdots+F_{2n-1}F_{2n}=F_{2n}^2$

(3) $F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n \qquad (n\geq 2)$

(4) $F_{n+2}F_{n-1}-F_nF_{n+1}=(-1)^n \quad (n\geq 2)$

제2절 생성함수

생성함수는 세기 방법의 중요한 도구 중의 하나로 다소 추상적이나 일단 한 번 이해하면 여러 형태의 문제를 손쉽게 해결할 수 있게 해준다. 특히 어떤 특별한 조건이 주어진 중복조합과 중복순열에 관한 문제를 해결하는데 무척 유용하다. 이 절에서는 생성함수의 기본개념을 익히고 여러 가지 문제를 해결하는 데 생성함수가 어떻게 활용되는지 살펴보기로 한다.

예제 2.2.1 아래와 같이 정의된 세 수 a_n, b_n, c_n은 모두 같은 수임을 보여라.

(1) a_n : 세 문자 A, B, C에서 중복을 허락하여 n개의 문자를 뽑는 방법 중 A는 1개 이하, B와 C는 2개 이하가 되도록 뽑는 방법의 수

(2) b_n : 다음 방정식의 정수해 (x_1, x_2, x_3)의 개수

$$x_1+x_2+x_3=n \ (\text{단}, 0\le x_1\le 1, 0\le x_2, x_3\le 2) \qquad (2.1)$$

(3) c_n : 다항식 $f(x)=(1+x)(1+x+x^2)^2$에서 x^n의 계수

풀이>> ① $a_n=b_n$을 보이자. (1)의 조건에 맞게 A, B, C에서 n문자를 뽑았을 때 각각 A, B, C의 개수를 x_1, x_2, x_3라 하자. 그러면

$$x_1+x_2+x_3=n \ (\text{단}, 0\le x_1\le 1, 0\le x_2, x_3\le 2)$$

이 되어 (x_1, x_2, x_3)은 방정식 (2.1)의 정수해가 된다.
역으로, 방정식 (2.1)의 정수해 (x_1, x_2, x_3)가 주어지면 A를 x_1개, B를 x_2개, C를 x_3개 뽑으면 위 (1)의 조건을 만족한다. 따라서 $a_n=b_n$이다.

② $b_n=c_n$을 보이자. $f(x)$의 전개식에 나타나는 항은 $f(x)$의 각 인수

$$1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2$$

에서 한 항을 선택하고 그 선택된 항의 곱으로 이루어지기 때문에

$$x^{x_1}x^{x_2}x^{x_3}=x^{x_1+x_2+x_3} \quad (\text{단}, 0\le x_1\le 1, 0\le x_2,\ x_3\le 2)$$

의 형태가 된다. 따라서 $f(x)$에서 x^n의 계수 c_n은 방정식 (2.1)의 정수해의 개수인 b_n과 같다. □

문제 2.2.1

방정식

$$x_1+x_2+x_3=n \quad (\text{단}, 0\le x_1\le 3, 0\le x_2,\ x_3\le 4)$$

의 음이 아닌 정수해 (x_1, x_2, x_3)의 개수를 a_n이라 하자. a_n이 다항식 $f(x)$의 x^n의 계수가 되도록 $f(x)$를 정하여라.

정의 2.2.1 주어진 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

을 이 수열의 **(일반)생성함수**라고 한다.

예를 들어, 예제 2.2.1에 주어진 수열 $\{a_n\}$의 생성함수는

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=(1+x)(1+x+x^2)^2$$

이다.

생성함수는 때로는 단지 유한 항의 합으로 이루어진 다항식일 수도 있으나 어떤 경우에는 무한히 항이 계속될 수도 있다. 항이 무한히 많은 경우에도 우리는 유한 번째 항의 계수에만 관심을 두기 때문에 생성함수의 수렴 또는 발산은 고려하지 않아도 좋다. 즉, 생성함수는 수렴의 문제를 전혀 고려할 필요가 없는 형식적인 무한급수(formal power series)이다.

예제 2.2.2 다음 수열의 생성함수를 구하여라.

(1) $a_n=1 \quad (n\geq 0)$

(2) $a_n=n \quad (n\geq 0)$

(3) $a_n={}_mH_n \quad (n\geq 0)$

풀이》 (1) $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\dfrac{1}{1-x}$

(2) 위 (1)에 의하여

$$\begin{aligned} f(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=x+2x^2+\cdots+nx^n+\cdots \\ &=x(1+2x+\cdots+nx^{n-1}+\cdots) \\ &=x(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots)' \\ &=x\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

(3) 예제 1.4.14의 (1)에 의하여

$$\begin{aligned} f(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n={}_mH_0+{}_mH_1x+{}_mH_2x^2+\cdots+{}_mH_nx^n+\cdots \\ &=\binom{m-1}{0}+\binom{m}{1}x+\binom{m+1}{2}x^2+\cdots+\binom{m+n-1}{n}x^n+\cdots \\ &=\frac{1}{(1-x)^m} \end{aligned}$$

□

문제 2.2.2

다음 수열의 생성함수를 구하여라.

(1) $a_n=1, 0, 1, 0, 1, 0 \cdots \quad (n\geq 0)$

(2) $a_n=\binom{m}{n} \quad (n\geq 0)$

(3) $a_n=\dfrac{1}{n!} \quad (n\geq 0)$

예제 2.2.3 다음에서 $f(x)$는 수열 $\{a_n\}$의 생성함수이다. a_n을 구하여라.

(1) $f(x)=\ln(1+x)$

(2) $f(x)=\sqrt{1+x}$

풀이>> (1) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots$ 이므로

$$a_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\quad(n\geq 1),\ a_0=0$$

이다.

(2) $f^{(n)}(0)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\\&=1+\frac{1/2}{1!}x+\frac{1/2(1/2-1)}{2!}x^2+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}x^n\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$a_n=\binom{1/2}{n}=\frac{1/2(1/2-1)\cdots(1/2-n+1)}{n!}$$

이다. □

문제 2.2.3

다음에서 $f(x)$는 수열 $\{a_n\}$의 생성함수이다. a_n을 구하여라.

(1) $f(x)=\ln\frac{1}{1-x}$

(2) $f(x)=(1+x)^c$ (c는 실수)

정리 2.2.2

수열 a_n, b_n의 생성함수를 각각 $f(x), g(x)$라 하자. 그러면

(1) 수열 $c_n = a_n \pm b_n$의 생성함수는 $f(x) \pm g(x)$이다.

(2) 수열 $c_n = a_{n-k}$의 생성함수는 $x^k f(x)$이다. (단, $c_0 = c_1 = \cdots = c_{k-1} = 0$)

(3) 수열 $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ 의 생성함수는 $f(x)g(x)$이다.

(4) 수열 $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ 의 생성함수는 $\dfrac{f(x)}{1-x}$ 이다.

【증명】 $f(x)$와 $g(x)$는 각각 수열 a_n과 b_n의 생성함수이므로

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots$$

이다.

(1) $$\begin{aligned} f(x) \pm g(x) &= (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x + \cdots + (a_n \pm b_n)x^n + \cdots \\ &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \end{aligned}$$

이므로 수열 $c_n = a_n \pm b_n$의 생성함수는

$$f(x) \pm g(x)$$

이다.

(2) 등식 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$에 x^k를 곱하면

$$\begin{aligned} x^k f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+k} = a_0 x^k + a_1 x^{k+1} + a_2 x^{k+2} + \cdots + a_n x^{k+n} + \cdots \\ &= c_k x^k + c_{k+1} x^{k+1} + c_{k+2} x^{k+2} + \cdots + c_{k+n} x^{k+n} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \end{aligned}$$

이다.

따라서 $c_n = a_{n-k}$의 생성함수는

$$x^k f(x)$$

이다.

(3) $f(x)g(x) = (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots$

$$+ (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots \ + a_kb_{n-k} + \cdots + a_nb_0)x^n + \cdots$$

$$= c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$$

이므로 수열 $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}$의 생성함수는

$$f(x)g(x)$$

이다.

(4) $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$

이므로

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 1\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)x^n$$

$$= a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \cdots$$

$$+ (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)x^n + \cdots$$

$$= c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$$

이다. 따라서 수열 $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$의 생성함수는

$$\frac{f(x)}{1-x}$$

이다. □

예제 2.2.4 다음 물음에 답하여라.

(1) $f(x)$를 수열 a_n의 생성함수라 하자. 수열 $c_n = a_n - a_{n-1}(n \geq 1)$의 생성함수를 $f(x)$로 나타내어라. (단, $c_0 = a_0$이다.)

(2) 수열 $a_n=n^2$의 생성함수를 구하여라.

(3) 수열 $c_n=1^2+2^2+\cdots+n^2$의 생성함수를 구하여라.

풀이>> (1) 정리 2.2.2에 의하여 수열 a_n과 a_{n-1}의 생성함수는 각각 $f(x)$와 $xf(x)$이다. 그러므로 수열 $c_n=a_n-a_{n-1}$의 생성함수는

$$f(x)-xf(x)=(1-x)f(x)$$

이다.

(2) $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$의 양변을 미분하면

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$$

이고 양변에 x를 곱하면

$$\frac{x}{(1-x)^2}=x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$$

이다. 다시 양변을 미분하여 x를 곱하면

$$x\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)=1^2x+2^2x^2+3^2x^3+4^2x^4+\cdots+n^2x^n+\cdots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n$$

이므로 수열 $a_n=n^2$의 생성함수는

$$x\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

이다.

(3) 위 (2)에서 수열 n^2의 생성함수는

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

이므로 정리 2.2.2의 (4)에 의하여 수열 $c_n=1^2+2^2+\cdots+n^2$의 생성함수는

$$\frac{1}{1-x}\,\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}=\frac{x(1+x)}{(1-x)^4}$$

이다. □

문제 2.2.4

다음 물음에 답하여라.

(1) $f(x)$를 수열 a_n의 생성함수라 하자. d가 상수일 때 수열 $c_n = da_n$의 생성함수를 $f(x)$로 나타내어라.

(2) 수열 $a_n = n(n-1)$의 생성함수를 구하여라.

(3) 수열 $a_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + (n-1)n$의 생성함수를 구하여라. (단, $a_0 = a_1 = 0$)

예제 2.2.5 고정된 자연수 k에 대하여 다음 방정식

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

의 음이 아닌 정수해 $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$의 개수를 a_n이라 할 때 a_n의 생성함수를 구하여라. 또 이를 이용하여 a_n을 구하여라.

풀이>> a_n의 생성함수를 $f(x)$라 하자. 위 방정식에서 각 x_k는 $0, 1, 2, \cdots$의 값을 취할 수 있으므로 생성함수 $f(x)$는

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= (1+x+x^2+\cdots)(1+x+x^2+\cdots)\cdots(1+x+x^2+\cdots) \\ &= (1+x+x^2+\cdots)^k = \left(\frac{1}{1-x}\right)^k = (1-x)^{-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-k}{n} x^n \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n \binom{-k}{n} \\ &= (-1)^n \frac{(-k)(-k-1)\cdots(-k-n+1)}{n!} \\ &= \binom{k+n-1}{n} = {}_kH_n \end{aligned}$$

이다. □

문제 2.2.5

다음 방정식

$$x_1+x_2+x_3=n \qquad (\text{단}, x_1\geq 0, x_2\geq 1, x_3\geq 2)$$

의 정수해 (x_1, x_2, x_3)의 개수를 a_n이라 할 때 a_n의 생성함수를 구하여라. 또 이를 이용하여 a_n을 구하여라.

예제 2.2.6 생성함수를 이용하여 30개의 똑같은 공을 5개의 서로 다른 상자에 넣을 때 첫 상자에는 10개 이하가 되도록 넣는 방법의 수를 구하여라.

풀이>> n개의 똑같은 공을 5개의 서로 다른 상자에 넣을 때 첫 상자에는 10개 이하가 되도록 넣는 방법의 수를 a_n이라 하자. k번째 상자에 들어 있는 공의 수를 x_k라 하면 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$는 방정식

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=n \qquad (\text{단}, 0\leq x_1\leq 10, x_2, x_3, x_4, x_5\geq 0)$$

의 정수해이고 그 개수는 a_n이다. 그러므로 a_n의 생성함수 $f(x)$는

$$\begin{aligned} f(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \\ &=(1+x+x^2+\cdots+x^{10})(1+x+x^2+\cdots)\cdots(1+x+x^2+\cdots) \\ &=\frac{1-x^{11}}{1-x}\left(\frac{1}{1-x}\right)^4=\frac{1-x^{11}}{(1-x)^5} \\ &=(1-x^{11})\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-5}{n}x^n=(1-x^{11})\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+5-1}{n}x^n \end{aligned}$$

이다. 따라서 문제의 조건을 만족하는 a_{30}은

$$f(x)=(1-x^{11})\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+5-1}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+4}{n}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+4}{n}x^{n+11}$$

의 x^{30}의 계수

$$\binom{34}{30}-\binom{23}{19}=\binom{34}{4}-\binom{23}{4}$$

이다. □

문제 2.2.6

생성함수를 이용하여 10개의 서로 다른 주사위를 굴릴 때 합이 25가 되는 경우의 수를 구하여라.

(힌트 : 방정식 $x_1+x_2+\cdots+x_{10}=25$ (단, $1\le x_i\le 6$)을 이용한다.)

예제 2.2.7 방정식

$$x_1+2x_2+3x_3+5x_4=n$$

의 음이 아닌 정수해 (x_1, x_2, x_3, x_4)의 개수를 a_n이라 할 때 a_n의 생성함수 $f(x)$를 구하여라.

풀이>> 위의 방정식에서

$$y_1=x_1,\ y_2=2x_2,\ y_3=3x_3,\ y_4=5x_4$$

로 치환하면 위의 방정식은 아래와 같은 방정식

$$y_1+y_2+y_3+y_4=n$$

로 바뀌게 된다. 여기서

$$y_1=0, 1, 2, 3, 4, \cdots \qquad y_2=0, 2, 4, 6, 8, \cdots$$
$$y_3=0, 3, 6, 9, 12, \cdots \qquad y_4=0, 5, 10, 15, 20, \cdots$$

이므로 a_n의 생성함수 $f(x)$는

$$\begin{aligned} f(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \\ &=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots) \\ &=\frac{1}{1-x}\,\frac{1}{1-x^2}\,\frac{1}{1-x^3}\,\frac{1}{1-x^5} \end{aligned}$$

이다. □

문제 2.2.7

방정식

$$x_1+2x_2+3x_3=n$$

의 자연수해 (x_1, x_2, x_3)의 개수를 a_n이라 할 때 a_n의 생성함수를 구하여라.

예제 2.2.8 자연수 n에 대하여

$$P_n=\{\lambda \mid \lambda \text{는 } n\text{의 분할}\}$$
$$PD_n=\{\lambda \mid \lambda \text{는 부분이 모두 다른 } n\text{의 분할}\}$$
$$PO_n=\{\lambda \mid \lambda \text{는 부분이 모두 홀수인 } n\text{의 분할}\}$$

이라 하자.

(1) 집합 P_n의 원소의 개수를 $p(n)$이라 할 때 $p(n)$의 생성함수를 구하여라.

(2) 집합 PD_n의 원소의 개수를 $pd(n)$이라 할 때 $pd(n)$의 생성함수를 구하여라.

(3) 집합 PO_n의 원소의 개수를 $po(n)$이라 할 때 $po(n)$의 생성함수를 구하여라.

(4) 위 (2)와 (3)을 이용하여 $pd(n)=po(n)$임을 보여라.
(단, $p(0)=pd(0)=po(0)=1$)

풀이>> (1) n의 분할 λ가

$$\lambda=1^{x_1}2^{x_2}3^{x_3}\cdots$$

이면 $(x_1, x_2, x_3, \cdots)$는 방정식

$$x_1+2x_2+3x_3+\cdots=n$$

의 음이 아닌 정수해이다. 그러므로 n의 분할의 수 $p(n)$의 생성함수 $f(x)$는

$$\begin{aligned} f(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n \\ &=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)\cdots \end{aligned}$$

$$=\frac{1}{1-x}\,\frac{1}{1-x^2}\,\frac{1}{1-x^3}\cdots$$
$$=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^i}$$

이다.

(2) n의 분할 $\lambda=1^{x_1}2^{x_2}3^{x_3}\cdots$가 집합 PD_n의 원소라면 $(x_1, x_2, x_3, \cdots)$는 방정식

$$x_1+2x_2+3x_3+\cdots=n \quad (\text{단, } x_i\text{는 } 0 \text{ 또는 } 1)$$

의 음이 아닌 정수해이다. 그러므로 $pd(n)$의 생성함수 $g(x)$는

$$\begin{aligned} g(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}pd(n)x^n \\ &=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots \\ &=\prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i) \end{aligned}$$

이다.

(3) n의 분할 $\lambda=1^{x_1}2^{x_2}3^{x_3}\cdots$가 집합 PO_n의 원소라면 $(x_1, x_3, x_5, \cdots)$는 방정식

$$x_1+3x_3+5x_5+\cdots=n$$

의 음이 아닌 정수해이다. 그러므로 $po(n)$의 생성함수 $h(x)$는

$$\begin{aligned} h(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}po(n)x^n \\ &=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)\cdots \\ &=\frac{1}{1-x}\,\frac{1}{1-x^3}\,\frac{1}{1-x^5}\cdots \\ &=\prod_{i=0}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2i+1}} \end{aligned}$$

이다.

(4) 위 (2)과 (3)에 의하여

$$\begin{aligned}g(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}pd(n)x^n\\&=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots\\&=\frac{1-x^2}{1-x}\,\frac{1-x^4}{1-x^2}\,\frac{1-x^6}{1-x^3}\,\frac{1-x^8}{1-x^4}\cdots\\&=\frac{1}{1-x}\,\frac{1}{1-x^3}\,\frac{1}{1-x^5}\cdots\\&=\prod_{i=0}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2i+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}po(n)x^n=h(x)\end{aligned}$$

이므로 $pd(n)=po(n)$이다. □

문제 2.2.8

부분이 서로 다른 2의 거듭제곱으로 이루어진 n의 분할의 수를 a_n이라 하자.

(1) a_n의 생성함수 $f(x)$를 구하여라. (단, $a_0=1$)

(2) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 임을 보여라.

(3) 위 (2)를 이용하여 임의의 자연수는 서로 다른 2의 거듭제곱의 합으로 유일하게 나타낼 수 있음을 보여라.

이제 생성함수를 이용하여 점화식으로 주어진 수열의 일반항을 구하는 방법에 대하여 알아보자.

예제 2.2.9 다음 피보나치수열 F_n의 생성함수를 구하여라. 또 생성함수의 전개식을 이용하여 F_n을 구하여라.

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\ (n\geq 2),\ F_0=0,\ F_1=1$$

풀이≫ 수열 F_n의 생성함수를 $f(x)$라 하자. 그러면

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n x^n=F_0+F_1x+F_2x^2+F_3x^3+\cdots$$

$$xf(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n x^{n+1}=F_0x+F_1x^2+F_2x^3+F_3x^4+\cdots$$

이다. 위의 두 식으로부터

$$\begin{aligned}f(x)-xf(x)&=F_0+(F_1-F_0)x+(F_2-F_1)x^2+(F_3-F_2)x^3+\cdots\\&=0+x+F_0x^2+F_1x^3+\cdots\\&=x+x^2(F_0+F_1x+\cdots+F_{n-2}x^{n-2}+\cdots)\\&=x+x^2f(x)\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$f(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$$

이다. 한편, $f(x)$를 부분분수로 분해하여 전개하면

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}x}-\frac{1}{1+\alpha x}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{-n}-(-\alpha)^n)x^n,\quad \alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}F_n&=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{-n}-(-\alpha)^n)\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)\qquad(n\geq 0)\end{aligned}$$

이다. □

문제 2.2.9

다음 수열 a_n의 생성함수를 구하여라.

$$a_n=a_{n-1}-2a_{n-2}\quad(n\geq 2),\quad a_0=0,\ a_1=1$$

정리 2.2.3

상수계수를 가지는 선형동차점화식

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \quad (n \geq k, c_k \neq 0) \tag{2.2}$$

와 초기조건 $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}$이 주어지는 수열 $\{a_n\}$의 생성함수를 $f(x)$라 하면

$$f(x) = \frac{g(x)}{1 - c_1 x - c_2 x^2 - \cdots - c_k x^k}$$

이다. 여기서 $g(x)$는 x에 관한 $(k-1)$차 이하의 다항식이다.

【증명】 (2.2)의 양변에 x^n을 곱하여 $\sum_{n=k}^{\infty}$를 취하면

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n x^n = c_1 \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-1} x^n + c_2 \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-2} x^n + \cdots + c_k \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} x^n$$

이다. 이 식을 $f(x)$로 나타내면

$$\begin{aligned} & f(x) - \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i \\ & = c_1 x \left(f(x) - \sum_{i=0}^{k-2} a_i x^i\right) + c_2 x^2 \left(f(x) - \sum_{i=0}^{k-3} a_i x^i\right) + \cdots + c_k x^k f(x) \end{aligned}$$

이 되어 적당한 $(k-1)$차 이하의 다항식 $g(x)$를 잡으면

$$f(x) = \frac{g(x)}{1 - c_1 x - c_2 x^2 - \cdots - c_k x^k}$$

이다. □

위의 정리 2.2.3에서

$$p(x) = 1 - c_1 x - c_2 x^2 - \cdots - c_k x^k$$

라 하면

$$g(x) = f(x) p(x)$$

이고 $g(x)$는 $(k-1)$차 이하의 다항식이므로

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{k-1} x^{k-1})(1 - c_1 x - c_2 x^2 - \cdots - c_{k-1} x^{k-1})$$

을 전개하여 $(k-1)$차 이하의 다항식을 취하면 그것이 바로 $g(x)$이다. 이렇게 구한 $g(x)$와 $f(x)=\dfrac{g(x)}{p(x)}$의 관계식으로부터 a_n의 생성함수 $f(x)$를 쉽게 구할 수 있다. 여기서 $g(x)$는 $(k-1)$차 이하의 다항식임에 다시 한번 유의하자.

예를 들어 피보나치수열

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\ (n\geq 2), a_0=0, a_1=1$$

에서 $p(x)=1-x-x^2$이고 $a_0+a_1x=0+1x$이다. 그러므로 $g(x)$는

$$(0+1x)(1-x)=x(1-x)=x-x^2$$

에서 1차 이하인 다항식이기 때문에 $g(x)=x$이며 a_n의 생성함수 $f(x)$는

$$f(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$$

이다.

예제 2.2.10 다음 수열 a_n의 생성함수를 구하여라. 또 생성함수의 전개식을 이용하여 a_n을 구하여라.

(1) $6a_n=11a_{n-1}-6a_{n-2}+a_{n-3}\ (n\geq 3),\ a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=1$

(2) $a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}\ (n\geq 2),\ a_0=0,\ a_1=1$

풀이≫ (1) $p(x)=1-\frac{11}{6}x+x^2-\frac{1}{6}x^3$, $a_0+a_1x+a_2x^2=x+x^2$이고 $g(x)$는

$$\left(1-\frac{11}{6}x+x^2\right)(x+x^2)=x-\frac{5}{6}x^2-\frac{5}{6}x^3+x^4$$

의 2차 이하인 다항식 $x-\frac{5}{6}x^2$이다. 따라서 a_n의 생성함수 $f(x)$는

$$f(x)=\frac{x-\frac{5}{6}x^2}{1-\frac{11}{6}x+x^2-\frac{1}{6}x^3}$$

이다.

$f(x)$를 부분분수로 분해하여 전개하면

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-9/2}{1-\frac{1}{3}x} + \frac{4}{1-\frac{1}{2}x} + \frac{1/2}{1-x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\right)x^n \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2\cdot 3^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2} \quad (n \geq 0) \end{aligned}$$

이다.

(2) $p(x)=1-2x+x^2=(1-x)^2$, $a_0+a_1x=0+1x$이고 $g(x)$는

$$(1-2x)(0+1x)=x-2x^2$$

인 1차 이하인 다항식 x이다. 따라서 수열 a_n의 생성함수 $f(x)$는

$$f(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$$

이다. 이를 부분분수로 분해하여 전개하면

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-1+(-1)^n\binom{-2}{n}\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n \end{aligned}$$

이고, 따라서 $a_n=n$ $(n \geq 0)$이다. □

문제 2.2.10

다음 수열 a_n의 생성함수를 구하여라.

(1) $a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}+3a_{n-3}$ $(n \geq 3)$, $a_0=a_1=a_2=1$

(2) $a_n=3a_{n-1}-3a_{n-2}+a_{n-3}$ $(n \geq 3)$, $a_0=a_1=a_2=1$

지금까지 살펴본 (일반)생성함수는 특별한 조건이 주어진 중복조합에 관한 문제를 해결하는데 무척 효과적이었다. 이제 특별한 조건이 주어진 중복순열에 관한 문제의 해결에 유용한 지수생성함수에 대하여 살펴보기로 하자.

예제 2.2.11 아래와 같이 정의된 세 수 a_n, b_n, c_n은 모두 같은 수임을 보여라.

(1) a_n : 세 문자 A, B, C에서 중복을 허락하여 n문자를 뽑아 일렬로 배열하는 방법 중 A는 1개 이하, B와 C는 2개 이하가 되게 하는 방법의 수

(2) b_n : S가 방정식

$$x_1+x_2+x_3=n \quad (\text{단, } 0\le x_1\le 1,\ 0\le x_2,\ x_3\le 2) \qquad (2.3)$$

의 음이 아닌 정수해 (x_1, x_2, x_3)의 집합일 때

$$b_n=\sum_{(x_1,x_2,x_3)\in S}\frac{n!}{x_1!x_2!x_3!}$$

(3) c_n : 다항식

$$f(x)=\left(\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}\right)\left(\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)\left(\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)$$

에서 $\dfrac{x^n}{n!}$의 계수

풀이≫ ① $a_n=b_n$을 보이자. (1)의 조건에 맞게 A, B, C에서 각각 x_1, x_2, x_3개를 뽑은 총 n문자를 일렬로 배열하면 (x_1, x_2, x_3)는 집합 S의 원소이고 이런 n문자를 일렬로 배열할 수 있는 방법의 수는

$$\frac{n!}{x_1!x_2!x_3!}$$

이다.

역으로, (x_1, x_2, x_3)가 집합 S의 원소이면

$$\frac{n!}{x_1!x_2!x_3!}$$

는 (1)의 조건에 맞게 A를 x_1개, B를 x_2개, C를 x_3개를 뽑은 총 n문자를 일렬로 배열할 수 있는 방법의 수이다. 그러므로 $a_n = b_n$이다.

② $b_n = c_n$을 보이자. $f(x)$의 전개식에 나타나는 항은 $f(x)$의 각 인수

$$\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!},\quad \frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!},\quad \frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}$$

에서 한 항을 선택하고 그 선택된 항의 곱으로 이루어지기 때문에

$$\frac{x^{x_1}}{x_1!}\,\frac{x^{x_2}}{x_2!}\,\frac{x^{x_3}}{x_3!}=\frac{x^{x_1+x_2+x_3}}{x_1!x_2!x_3!}\qquad (단,\ 0\le x_1\le 1,\ 0\le x_2,\ x_3\le 2)$$

의 형태가 된다. 그러므로 $f(x)$에서 $\frac{x^n}{n!}$의 계수 c_n은 방정식

$$x_1+x_2+x_3=n\qquad (단,\ 0\le x_1\le 1,\ 0\le x_2,\ x_3\le 2)$$

의 정수해 (x_1, x_2, x_3)에 대한

$$\frac{n!}{x_1!x_2!x_3!}$$

의 모든 합이다. 따라서 $c_n = b_n$이다. □

문제 2.2.11

S를 방정식

$$x_1+x_2+x_3=n\qquad (단,\ 0\le x_1\le 3,\ 0\le x_2,\ x_3\le 4)$$

의 음이 아닌 정수해 (x_1, x_2, x_3)의 집합이라 하자.

$$a_n=\sum_{(x_1,x_2,x_3)\in S}\frac{n!}{x_1!x_2!x_3!}$$

라 할 때 a_n이 다항식 $f(x)$의 $\frac{x^n}{n!}$의 계수가 되도록 $f(x)$를 정하여라.

정의 2.2.4 주어진 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$f(x)=a_0\frac{1}{0!}+a_1\frac{x}{1!}+a_2\frac{x^2}{2!}+a_3\frac{x^3}{3!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}$$

을 이 수열의 **지수생성함수**라고 한다.

예를 들어 예제 2.2.11에서 주어진 수열 $\{a_n\}$의 지수생성함수는

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}=\left(\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}\right)\left(\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)^2$$

이다.

예제 2.2.12 다음 수열의 지수생성함수를 구하여라.

(1) $a_n=1\quad(n\geq 0)$

(2) $a_n=r^n\quad(n\geq 0)$

(3) $a_n={}_mP_n\quad(n\geq 0)$

풀이>> (1) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}$

$$=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=e^x$$

(2) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}$

$$=1+\frac{rx}{1!}+\frac{r^2x^2}{2!}+\cdots+\frac{r^nx^n}{n!}+\cdots$$

$$=1+\frac{rx}{1!}+\frac{(rx)^2}{2!}+\cdots+\frac{(rx)^n}{n!}+\cdots=e^{rx}$$

(3) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}=1+{}_mP_1\frac{x}{1!}+{}_mP_2\frac{x^2}{2!}+\cdots+{}_mP_n\frac{x^n}{n!}+\cdots$

$$=\binom{m}{0}+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\cdots+\binom{m}{n}x^n+\cdots+\binom{m}{m}x^m$$

$$=(1+x)^m$$

□

문제 2.2.12

다음 수열의 지수생성함수를 구하여라.

(1) $a_n=1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots \quad (n \geq 0)$

(2) $a_n=n \quad (n \geq 0)$

(3) $a_n=n! \quad (n \geq 0)$

예제 2.2.13 수열 a_n, b_n의 지수생성함수를 각각 $f(x)$라 $g(x)$할 때 다음 수열 c_n의 지수생성함수를 구하여라.

(1) $c_n=a_n \pm b_n$

(2) $c_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k b_{n-k}$

(3) $c_n=a_{n+1}-a_n \quad (n \geq 0)$

풀이>> $f(x)$와 $g(x)$는 각각 수열 a_n과 b_n의 지수생성함수이므로

$$f(x)=a_0\frac{1}{0!}+a_1\frac{x}{1!}+a_2\frac{x^2}{2!}+\cdots+a_n\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$g(x)=b_0\frac{1}{0!}+b_1\frac{x}{1!}+b_2\frac{x^2}{2!}+\cdots+b_n\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

이다.

(1) 위의 두 식으로부터

$$\begin{aligned} f(x) \pm g(x) &= (a_0 \pm b_0)\frac{1}{0!}+(a_1 \pm b_1)\frac{x}{1!}+\cdots+(a_n \pm b_n)\frac{x^n}{n!}+\cdots \\ &= c_0\frac{1}{0!}+c_1\frac{x}{1!}+c_2\frac{x^2}{2!}+\cdots+c_n\frac{x^n}{n!}+\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

이므로 수열 $c_n=a_n \pm b_n$의 지수생성함수는

$$f(x) \pm g(x)$$

이다.

(2) $f(x)$와 $g(x)$를 곱하면

$$f(x)g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}\frac{b_{n-k}}{(n-k)!}\right)x^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}a_kb_{n-k}\right)\frac{x^n}{n!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_kb_{n-k}\right)\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{x^n}{n!}$$

이므로 수열 $c_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_kb_{n-k}$의 지수생성함수는

$$f(x)g(x)$$

이다.

(3) $$f'(x)=a_1\frac{1}{1!}+a_2\frac{2x}{2!}+\cdots+a_n\frac{nx^{n-1}}{n!}+\cdots$$
$$=a_1\frac{1}{0!}+a_2\frac{x}{1!}+\cdots+a_n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}\frac{x^n}{n!}$$

이다. 위의 두 식으로부터

$$f'(x)-f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{x^n}{n!}$$

이므로 수열 $c_n=a_{n+1}-a_n$의 지수생성함수는 $f'(x)-f(x)$이다. □

문제 2.2.13

수열 a_n의 지수생성함수를 $f(x)$라 할 때 다음 수열 c_n의 지수생성함수를 구하여라.

(1) $c_n=da_n$ (단, d는 상수)

(2) $c_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k$

예제 2.2.14 n명을 서로 다른 세 개의 방 A, B, C에 배치하려 한다. 다음 수열의 지수생성함수를 구하고, 이를 이용하여 각 수열을 구하여라.

(1) a_n : 각 방에 적어도 한 명은 배치하는 방법의 수

(2) b_n : 각 방에 짝수 명씩 배치하는 방법의 수

풀이>> (1) a_n은 세 문자 A, B, C에서 중복을 허락하여 n개를 뽑아 일렬로 배열하는 방법 중 각 문자를 적어도 한번은 포함하는 방법의 수와 같으므로 a_n의 지수생성함수 $f(x)$는 예제 2.2.11에 의하여

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \right)^3 \\ &= (e^x - 1)^3 = e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (3^n - 3 \cdot 2^n + 3) \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n=0) \\ 3^n - 3 \cdot 2^n + 3 & (n \geq 1) \end{cases}$$

이다.

(2) b_n은 세 문자 A, B, C에서 중복을 허락하여 n개를 뽑아 일렬로 배열하는 방법 중 각 문자를 짝수 번씩 포함하는 방법의 수와 같으므로 다시 예제 2.2.11과 같은 방법으로 b_n의 지수생성함수 $g(x)$는

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!} = \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \right)^3 \\ &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8}(e^{3x} + 3e^x + 3e^{-x} + e^{-3x}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8} \left(3^n + 3 + 3 \cdot (-1)^n + (-3)^n \right) \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$b_n = \frac{1}{8} \left(3^n + 3 + 3 \cdot (-1)^n + (-3)^n \right) = \begin{cases} 0 & (n\text{이 홀수}) \\ \frac{1}{8}(2 \cdot 3^n + 6) & (n\text{이 짝수}) \end{cases}$$

이다. □

문제 2.2.14

n명을 서로 다른 네 개의 방 A, B, C, D에 배치하는 방법 중 A, B에는 많아야 1명이 되도록 배치하는 방법의 수를 c_n이라 할 때, 수열 c_n의 지수생성함수를 구하고 이를 이용하여 c_n을 구하여라.

예제 2.2.15 k를 자연수라 하자. 지수생성함수를 이용하여 제2종 스털링 수

$$S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n$$

임을 보여라.

풀이≫ $T(n,k)=k!S(n,k)$라 하면 $T(n,k)$는 n개의 서로 다른 공을 k개의 서로 다른 상자에 넣을 때 빈 상자가 없도록 넣는 방법의 수이다(예제 1.6.7 참조). 그러므로 $T(n,k)$의 지수생성함수 $f(x)$는

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}T(n,k)\frac{x^n}{n!}=\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^k\\&=(e^x-1)^k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i e^{(k-i)x}\\&=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i\left(\sum_{n=0}^{\infty}(k-i)^n\frac{x^n}{n!}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n\right)\frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$T(n,k)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n$$

이고

$$S(n,k)=\frac{1}{k!}T(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n$$

이다. □

문제 2.2.15

벨수는 다음과 같이 정의하였다.

$$B(n)=\sum_{k=1}^{n}S(n,k)\ \ (n\geq 1),\ \ B(0)=1$$

(1) 다음 점화식이 성립함을 보여라.

$$B(n+1)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B(n-k)\qquad (n\geq 0)$$

(2) 벨수 $B(n)$의 지수생성함수 $f(x)$는

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}B(n)\frac{x^n}{n!}=\exp(e^x-1)$$

임을 보여라. (단, $\exp(x)=e^x$)

연습문제 2.2

1 다음 수열의 생성함수를 구하여라.

(1) $a_n=2$

(2) $a_n=\frac{1}{n}\ \ (n\geq 1),\ \ a_0=0$

(3) $a_n=n(n-1)(n-2)\ \ (n\geq 0)$

(4) $a_n=1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots+(n-2)(n-1)n,\quad a_0=a_1=a_2=0$

2 다음 수열의 지수생성함수를 구하여라.

(1) $a_n=2^{n+1}\ \ (n\geq 0)$

(2) $a_n=\frac{1}{n+1}\ \ (n\geq 0)$

3 생성함수를 이용하여 다음 수열의 일반항을 구하여라.

(1) $a_n=3a_{n-1},\ \ a_0=2$

(2) $a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2},\ \ a_0=1,\ \ a_1=2$

(3) $a_n=6a_{n-1}-9a_{n-2},\ \ a_0=1,\ \ a_1=1$

4 다음 물음에 답하여라.

(1) 세 문자 A, B, C에서 중복을 허락하여 n문자를 뽑을 때 A는 2개 이상, B는 홀수 개, C는 짝수 개를 뽑는 방법의 수를 a_n이라 할 때 a_n의 생성함수를 구하여라.

(2) 똑같은 공 n개를 서로 다른 세 상자에 넣을 때 각 상자에 적어도 2개 이상 넣는 방법의 수를 b_n이라 할 때 b_n의 생성함수를 구하여라.

(3) 방정식

$$x_1+x_2+x_3+x_4=n \qquad (\text{단, } x_i\geq i)$$

의 정수해 (x_1, x_2, x_3, x_4)의 개수를 c_n이라 할 때 c_n의 생성함수를 구하여라.

5 다음 각 수열의 생성함수를 구하여라.

(1) a_n : 방정식

$$2x_1+3x_2+5x_3=n$$

의 음이 아닌 정수해 (x_1, x_2, x_3)의 개수

(2) b_n : 똑같은 공 n개를 똑같은 세 상자에 넣는 방법의 수

(3) c_n : n을 자연수라 할 때, n의 분할 중 부분이 모두 짝수인 분할의 수

6 다음 각 수열의 지수생성함수를 구하여라.

(1) a_n : 세 문자 A, B, C에서 중복을 허락하여 문자를 뽑아 일렬로 배열할 때 A는 2개 이상, B는 홀수 개, C는 짝수 개를 포함하는 방법의 수

(2) b_n : 서로 다른 공 n개를 서로 다른 세 상자에 넣을 때 각 상자에 적어도 2개 이상 넣는 방법의 수

(3) c_n : S를 방정식

$$x_1+x_2+x_3+x_4=n \qquad (\text{단}, x_i \geq i)$$

의 음이 아닌 정수해 (x_1, x_2, x_3, x_4)의 집합이라 하자.

$$c_n=\sum_{(x_1, x_2, x_3, x_4)\in S} \frac{n!}{x_1!x_2!x_3!x_4!}$$

7 다음 관계를 만족하는 $g(x)$가 수열 a_n의 생성함수라 할 때 a_n을 구하여라.

(1) $x=\dfrac{g(x)}{1-g(x)}, \quad g(0)=0$

(2) $g(x)=x+g(x)^2, \quad g(0)=0$

8 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$를 원소의 개수가 1 또는 2인 블록으로 분할하는 방법의 수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $n=1$이면 분명히 $a_1=1$이고 $n=2$이면 그런 집합의 분할은 $\{1, 2\}$, $\{1\}\cup\{2\}$뿐이므로 $a_2=2$이다. 또, 집합 $\{1, 2, 3\}$을 원소의 개수가 1 또는 2인 블록으로 분할하는 방법은

$$\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\},\ \{1,\ 2\}\cup\{3\},\ \{1,\ 3\}\cup\{2\},\ \{1\}\cup\{2,\ 3\}$$

뿐이므로 $a_3=4$이다.

(1) a_n은 점화식

$$a_n=a_{n-1}+(n-1)a_{n-2}\ (n\geq 2),\ \ a_0=1,\ \ a_1=1$$

을 만족함을 보여라.

(2) a_n의 지수생성함수를 구하여라.

9 집합 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$에서 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$으로 가는 일대일대응 함수 f 중에서 $f\circ f$가 항등함수인 f의 개수를 a_n이라 할 때 a_n의 지수생성함수를 구하여라.

10 볼록$(n+1)$각형을 교차하지 않는 대각선으로 분할하려 한다.

(1) $(n-2)$개의 대각선으로 모두 삼각형이 되게 분할하는 방법의 수 a_n은 점화식

$$\sum_{k+l=n} a_k a_l=a_n\ \ (n\geq 2),\ \ a_0=0,\ \ a_1=1$$

을 만족함을 보여라.

(2) 수열 a_n의 생성함수를 $g(x)$라 하면 $g(x)$는 관계식

$$g(x)=x+g(x)^2,\ \ \ g(0)=0$$

을 만족함을 보여라.

(3) a_n을 구하여라.

11 집합 $\{1, 2, \cdots, n\}$에서 $\{1, 2, \cdots, n\}$으로 가는 일대일대응 함수 f 중에서

$$f(i) \neq i \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

인 함수의 개수를 D_n이라 하자. (단, $D_0=1$)

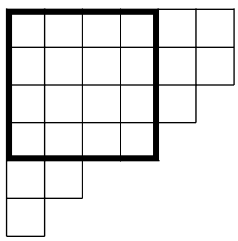
(1) 수열 D_n은 다음 점화식을 만족함을 보여라.

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$$

(2) 위 (1)을 이용하여 D_n의 지수생성함수를 구하여라.

(3) D_n의 지수생성함수를 이용하여 D_n을 구하여라.

12 λ가 어떤 자연수의 분할일 때 λ의 페러다이어그램에 포함되는 가장 큰 정사각형을 **더피스퀘어**(Durfee square)라고 한다. 예를 들어 $\lambda=(6, 6, 5, 4, 2, 1)$이면 아래 그림에서 굵은 선의 정사각형이 λ의 더피스퀘어이고 그 크기는 4이다.



(1) 더피스퀘어의 크기가 m이고 페러다이어그램이 주대각선에 관하여 대칭인 n의 분할의 수를 a_n이라 할 때 a_n의 생성함수를 구하여라.

(2) 부분이 모두 다르고 홀수인 n의 분할의 수를 b_n이라 할 때 b_n의 생성함수를 구하여라.

(3) 다음 등식이 성립함을 보여라.

$$\begin{aligned}&(1+x)(1+x^3)(1+x^5)\cdots\\&=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{m^2}}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\cdots(1-x^{2m})}\end{aligned}$$

제3절 알고리즘

이 절에서는 기원전에 발견된 유클리드 알고리즘과 이제까지 주로 개수를 살펴보았던 순열이나 조합, 부분집합 등을 효과적으로 나열하게 하는 알고리즘에 대해서 알아본다.

먼저 두 자연수의 최대공약수(gcd)를 알려주는 알고리즘에 관하여 살펴보자.

예제 2.3.1 아래의 유클리드 알고리즘을 이용하여 두 수 273과 141의 최대공약수를 구하여라.

(유클리드 알고리즘) m, n을 두 자연수라 하자.

① m을 n으로 나눈 나머지를 r이라 한다.
② $r=0$이면 $\gcd=n$을 출력하고 이 과정을 끝낸다.
③ $r\neq 0$이면 $m\leftarrow n$, $n\leftarrow r$하고 ①로 되돌아간다.

(단, 위에서 $a\leftarrow b$는 「a 대신 b로 대체」하라는 뜻이다.)

풀이>> 위의 알고리즘에서 $m=273$, $n=141$로 시작한다.

- $273=141\cdot 1+132$이고 $r=132$는 0이 아니므로 $m\leftarrow 141$, $n\leftarrow 132$하고, ①로 되돌아간다.
- $141=132\cdot 1+9$이고 $r=9$는 0이 아니므로 $m\leftarrow 132$, $n\leftarrow 9$하고 ①로 되돌아간다.
- $132=9\cdot 14+6$이고 $r=6$은 0이 아니므로 $m\leftarrow 9$, $n\leftarrow 6$하고 ①로 되돌아간다.
- $9=6\cdot 1+3$이고 $r=3$은 0이 아니므로 $m\leftarrow 6$, $n\leftarrow 3$하고 ①로 되돌아간다.
- $6=3\cdot 2+0$이고 $r=0$이므로 $\gcd=3$이며 이 알고리즘을 끝낸다.

위의 풀이 과정을 간단하게 요약하면

$$
\begin{aligned}
273 &= 141 \cdot 1 + 132 \\
141 &= 132 \cdot 1 + 9 \\
132 &= 9 \cdot 14 + 6 \\
9 &= 6 \cdot 1 + 3 \\
6 &= 3 \cdot 2 + 0
\end{aligned}
$$

이므로 두 수 273과 141의 최대공약수는 나머지가 0인 마지막 식에서 나누는 수에 해당하는 3이 된다. □

문제 2.3.1

유클리드 알고리즘을 이용하여 두 자연수 4509과 2628의 최대공약수를 구하여라.

MATHEMATICA

수학전문 프로그램인 매스매티카에서

1 입력창에

GCD[273, 141]

로 입력하고 실행(Shift+Enter key)하면 273과 141의 최대공약수인

3

이 출력된다.

2 부록의 B-1은 매스매티카를 이용하여 유클리드 알고리즘을 작성한 것이다.
여기서

mygcd[273, 141]

을 입력하고 실행하면 273과 141의 최대공약수인

3

이 출력된다.

흔히 놀이로 하는 바둑알 가져가기 게임은 바둑알의 개수에 따라 항상 이길 수 있는 전략이 있거나 그렇지 않은 경우로 나누어진다. 이러한 문제에 대한 알고리즘을 생각하여 보자.

예제 2.3.2 n개의 바둑알이 있다. A, B 두 사람이 A부터 시작하여 교대로 1개 또는 2개의 바둑알을 가져갈 때, 자기 차례에 바둑알을 가져갈 수 없는 사람이 지는 게임을 생각하여 보자. A가 이기는 전략이 있는 바둑알의 개수 n의 집합을 W라 하고 그렇지 않은 경우의 n의 집합을 L라 할 때, 집합 W와 L을 각각 구하여라.

풀이>> n이 1 또는 2이면 A가 한번에 모두 가져갈 수 있으므로 A가 이기며, 따라서 $1, 2 \in W$이다. $n=3$이면 A가 어떻게 바둑알을 가져가든 남는 바둑알의 개수는 2 이하이고 B가 모두 가져갈 수 있으므로 B가 이기고, $3 \in L$이다.
$n=4$일 때 A가 1개를 가져가면 B의 차례에 3개의 바둑알이 남아 B가 지게 되어 $4 \in W$이다.

일반적인 해법을 찾기 위해 n을 다음과 같이 세 경우로 나누어 생각하여 보자.

① $n=3k+1$**일 때**
A가 1개를 가져오면 남는 바둑알의 개수는 $3k$이다. 이제 B가 1개를 가져가면 A는 2개를, 2개를 가져가면 A는 1개를 가져가 항상 B의 차례에 남은 바둑돌의 개수를 3의 배수로 만들 수 있다. 이런 과정을 반복하면 결국 B의 차례에 3개의 바둑돌이 남고 B가 지게 되어 $n \in W$이다.

② $n=3k+2$**일 때**
A가 2개를 가져오면 남는 바둑알의 개수는 $3k$이고 위 ①과 같은 방법을 이용하면 $n \in W$임을 알 수 있다.

③ $n=3k$**일 때**
A가 1개를 가져가면 B는 2개를, 2개를 가져가면 B는 1개를 가져와 항상 A의 차례에 남은 바둑돌의 개수를 3의 배수로 만들 수 있다. 위 ①과 같은 방법을 이용하면 B가 이길 수 있으므로 $n \in L$이다.

따라서

$$L=\{n \mid n\text{은 3의 배수}\}$$
$$W=N-L \qquad (\text{단, } N\text{은 자연수 집합})$$

이다. □

문제 2.3.2

앞의 예제 2.3.2에서 자기 차례에 1개 이상 3개 이하의 바둑알을 가져갈 수 있을 때, 집합 W와 L을 각각 구하여라.

위의 바둑알 게임에서 각 사람이 가져 갈 수 있는 바둑알의 개수가 좀 더 다양한 경우를 알아보자.

예제 2.3.3 n개의 바둑알로부터 A, B 두 사람이 A부터 시작하여 교대로 1개, 3개 또는 8개의 바둑알을 가져갈 때, 자기 차례에 바둑알을 가져갈 수 없는 사람이 지는 게임을 생각하여 보자. A가 이기는 전략이 있는 바둑알의 개수 n의 집합을 W라 하고 그렇지 않은 경우의 n의 집합을 L이라 할 때, 집합 W와 L을 구하는 알고리즘을 작성하여라.

풀이>> $n=1$이면 A가 한 번에 가져갈 수 있으므로 $1 \in W$이다. $n=2$이면 A가 1개를 가져가야 하고, B가 나머지를 모두 가져갈 수 있기 때문에 $2 \in L$이다. $n=3$이면 A가 한 번에 가져갈 수 있으므로 $3 \in W$이다. $n=4$이면 A는 1개 또는 3개를 가져가게 되고, B가 나머지를 모두 가져갈 수 있기 때문에 $4 \in L$이다.

위와 같은 방법을 일반화하여 다음과 같은 알고리즘으로 나타낼 수 있다.

① 초기 집합으로 L과 W를 각각 다음과 같이 둔다.

$$L=\{2\}, \quad W=\{1, 3, 8\}$$

② 이제 주어진 자연수 n에 대해 $k=4$부터 n까지 다음 과정을 반복하여 시행한다.

- $k-1 \in W$, $k-3 \in W$이고, $k-8 \in W$이면 집합 L에 k를 첨가한다.
- 그렇지 않으면, 즉 $k-1 \in L$이거나 $k-3 \in L$이거나 $k-8 \in L$이면 집합 W에 k를 첨가한다.

위의 알고리즘으로부터

$$L=\{2, 4, 6, 11, 13, 15, 17, \cdots\}$$
$$W=\{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, \cdots\}$$

이다. □

문제 2.3.3

앞의 예제 2.3.3에서 자기 차례에 2개 또는 3개의 바둑알을 가져갈 수 있을 때, 집합 W와 L을 구하는 알고리즘을 작성하여라.

이제 $1, 2, \cdots, n$으로 이루어진 모든 순열을 나열하는 알고리즘에 대해 알아보자. 먼저 작은 수부터 차례로 배열하는 **사전식순서**(lexicographic order)가 있다. 예를 들어 $n=4$인 경우 $1234<1324$이므로 사전식순서에서 순열 1234는 순열 1324보다 앞에 있다. $n=3$인 경우 모든 순열을 사전식순서로 나열하면 다음과 같다.

123
132
213
231
312
321

예제 2.3.4 아래의 알고리즘은 사전식순서로 순열을 나열하는 알고리즘이다.

(사전식순서로 순열 나열하기) 사전식나열에서 $1, 2, \cdots, n$으로 이루어진 순열 $\pi=x_1x_2\cdots x_n$의 바로 다음 순열은 다음과 같이 결정된다.

① $x_k<x_{k+1}$인 k 중에서 최대값 j를 구한다. 그런 k가 없으면 π의 다음 순열은 없다.

② $x_{j+1}, x_{j+2}, \cdots, x_n$ 중에서 x_j보다 크고 x_j에 가장 가까운 x_l을 잡고

$$y_1=x_1,\ \ y_2=x_2,\ \ \cdots,\ \ y_{j-1}=x_{j-1},\ \ y_j=x_l$$

로 둔다.

③ $x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{l-1}, x_{l+1} \cdots, x_n$를 작은 수부터 차례로

$$y_{j+1},\ \ y_{j+2},\ \ \cdots,\ \ y_n$$

으로 두면 π의 다음 순열은

$$y_1y_2\cdots y_n$$

이다.

위 알고리즘을 이용하여 사전식나열에서 순열 $\pi=2135764$ 바로 다음 순열을 구하여라.

풀이>> $\pi=x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7=2135764$라 하자.

① $x_k<x_{k+1}$인 k는 2, 3, 4이고 이 중에서 최대값은 $j=4$이다.

② $x_4=5$의 오른쪽에 있는 수 $x_5=7, x_6=6, x_7=4$ 중에서 x_4보다 크며 x_4에 가장 가까운 것은 $x_6=6$이므로 $l=6$이다. 따라서

$$y_1=x_1=2,\ \ y_2=x_2=1,\ \ y_3=x_3=3,\ \ y_4=x_6=6$$

이다.

③ $x_4=5, x_5=7, x_7=4$를 작은 수부터 차례로 쓰면 4, 5, 7이므로

$$y_5=4,\ \ y_6=5,\ \ y_7=7,$$

이다. 따라서 π 바로 다음에 오는 순열은

$$y_1y_2y_3y_4y_5y_6y_7=2136457$$

이다. □

문제 2.3.4

사전식순서로 순열 나열하기 알고리즘을 이용하여 순열 $\pi=54623187$ 바로 다음 순열을 구하여라.

정의 2.3.1 주어진 순서로 집합의 모든 원소를 나열할 때 원소 π 앞에 나열되는 원소의 수를 $rank(\pi)$로 정의한다.

예를 들어 사전식순서로 1, 2, 3, 4로 이루어진 순열을 나열할 때 $rank(1234)=0$, $rank(1243)=1$이고 $rank(4321)=4!-1=23$이다.

예제 2.3.5 다음 물음에 답하여라.

(1) 사전식나열에서 $\pi=2136457$일 때 $rank(\pi)$를 구하여라.

(2) $n=7$인 경우 사전식나열에서 $rank(\mu)=35$인 순열 μ를 구하여라.

풀이>> (1) 사전식순서로 나열할 때 순열 $\pi=2136457$보다 앞에 나오는 순열은 다음 세 형태 중에 하나이다. 여기서 □는 앞에서 사용된 숫자를 제외하고는 어떤 숫자를 사용해도 좋다.

1 □ □ □ □ □ □ : 6!가지
2 1 3 4 □ □ □ : 3!가지
2 1 3 5 □ □ □ : 3!가지

그러므로 $rank(\pi)=6!+2\cdot 3!=732$이다.

(2) $rank(\mu)=35$인 순열 μ는 $35<6!$이므로 1부터 시작되고, $35<5!$이므로 12로 시작된다. 또 123으로 시작하는 마지막 순열의 $rank$는 $4!-1=23$이고, 124로 시작하는 마지막 순열의 $rank$는 $2\cdot 4!-1=47$이므로 μ는 124로 시작한다. 1243으로 시작하는 순열은 $3!=6$개이고 1245로 시작하는 순열도 $3!=6$개이므로 1245로 시작하는 맨 마지막 순열의 $rank$는 $24+6+6-1=35$이다. 그러므로 $rank(\mu)=35$인 순열 μ은 1245로 시작하는 맨 마지막 순열 1245763이다. □

문제 2.3.5

사전식나열에서 $\pi=3642157$일 때 $rank(\pi)$를 구하여라. 또 $n=7$일 때 $rank(\mu)=135$인 순열 μ를 구하여라.

예제 2.3.5와 같이 사전식나열에서 순열이 주어졌을 때 $rank$를 구하는 알고리즘과 $rank$가 주어졌을 때 순열을 구하는 알고리즘을 살펴보자.

(사전식나열에서 순열의 *rank* 구하기) $\pi=\pi_1\pi_2\cdots\pi_n$가 $1, 2, \cdots, n$의 순열일 때 사전식나열에서 $rank(\pi)$는 다음 알고리즘에 의하여 결정된다.

① $1\le i\le n-1$인 각 i에 대하여 $a_i=|\{j\,|\,\pi_j<\pi_i,\ j<i\}|$를 구한다.

② $rank(\pi)=(\pi_1-a_1-1)(n-1)!+(\pi_2-a_2-1)(n-2)!+\cdots$
$+(\pi_{n-1}-a_{n-1}-1)1!$

이다.

예를 들어 $\pi=\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4\pi_5\pi_6\pi_7=2136457$이면

$$\begin{aligned}
a_1&=|\{j\,|\,\pi_j<\pi_1=2,\ j<1\}|=|\phi|=0,\\
a_2&=|\{j\,|\,\pi_j<\pi_2=1,\ j<2\}|=|\phi|=0,\\
a_3&=|\{j\,|\,\pi_j<\pi_3=3,\ j<3\}|=|\{1,2\}|=2,\\
a_4&=|\{j\,|\,\pi_j<\pi_4=6,\ j<4\}|=|\{1,2,3\}|=3,\\
a_5&=|\{j\,|\,\pi_j<\pi_5=4,\ j<5\}|=|\{1,2,3\}|=3,\\
a_6&=|\{j\,|\,\pi_j<\pi_6=5,\ j<6\}|=|\{1,2,3,4\}|=4
\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}
rank(\pi)&=(\pi_1-a_1-1)(n-1)!+(\pi_2-a_2-1)(n-2)!+\cdots\\
&\quad+(\pi_{n-1}-a_{n-1}-1)1!\\
&=(2-0-1)(7-1)!+(1-0-1)(7-2)!+(3-2-1)(7-3)!\\
&\quad+(6-3-1)(7-4)!+(4-3-1)(7-5)!+(5-4-1)(7-6)!\\
&=6!+2\cdot 3!=732
\end{aligned}$$

(사전식순서에서 $rank$를 알고 순열 구하기) m, n이 $0 \le m \le n!-1$인 정수일 때 사전식나열에서 $rank(\mu)=m$인 순열 $\mu=\mu_1\mu_2\cdots\mu_n$은 다음 알고리즘에 의하여 결정된다.

① m을 $(n-1)!$으로 나눌 때 몫과 나머지가 각각 q_1, r_1이면,
$\mu_1=q_1+1$이다.
② r_1을 $(n-2)!$으로 나눌 때 몫과 나머지가 각각 q_2, r_2이면,
μ_2는 집합 $\{1, 2, \cdots, n\}-\{\mu_1\}$의 (q_2+1)번째 작은 원소이다.
③ r_2를 $(n-3)!$으로 나눌 때 몫과 나머지가 각각 q_3, r_3이면,
μ_3는 집합 $\{1, 2, \cdots, n\}-\{\mu_1, \mu_2\}$의 (q_3+1)번째 작은 원소이다.
④ 이를 반복하여 r_{n-2}를 $1!$로 나눌 때 몫과 나머지가 각각 q_{n-1}, r_{n-1}이면,
μ_{n-1}은 집합 $\{1, 2, \cdots, n\}-\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{n-2}\}$의 $(q_{n-1}+1)$번째 작은 원소이다.
⑤ μ_n은 집합 $\{1, 2, \cdots, n\}-\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{n-2}, \mu_{n-1}\}$의 원소이다.

위의 알고리즘을 이용하여 $n=7$일 때 사전식나열에서 $rank(\mu)=35$인 순열 μ를 구하여 보자.

① 35를 $(7-1)!=720$으로 나눌 때 몫과 나머지는 각각 0, 35이므로
$\mu_1=0+1=1$이다.
② 35를 $(7-2)!=120$으로 나눌 때 몫과 나머지가 각각 0, 35이므로
μ_2는 집합 $\{1, 2, \cdots, 7\}-\{1\}$의 $(0+1)$번째 작은 원소 2이다.
③ 35를 $(7-3)!=24$로 나눌 때 몫과 나머지가 각각 1, 11이므로
μ_3는 집합 $\{1, 2, \cdots, 7\}-\{1, 2\}$의 $(1+1)$번째 작은 원소 4이다.
④-1 11을 $(7-4)!=6$으로 나눌 때 몫과 나머지가 각각 1, 5이므로
μ_4는 집합 $\{1, 2, \cdots, 7\}-\{1, 2, 4\}$의 $(1+1)$번째 작은 원소 5이다.
④-2 5를 $(7-5)!=2$으로 나눌 때 몫과 나머지가 각각 2, 1이므로
μ_5는 집합 $\{1, 2, \cdots, 7\}-\{1, 2, 4, 5\}$의 $(2+1)$번째 작은 원소 7이다.
④-3 1을 $(7-6)!=1$로 나눌 때 몫과 나머지가 각각 1, 0이므로
μ_6는 집합 $\{1, 2, \cdots, 7\}-\{1, 2, 4, 5, 7\}$의 $(1+1)$번째 작은 원소 6이다.
⑤ μ_7은 집합 $\{1, 2, \cdots, 7\}-\{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$의 원소 3이다.

그러므로 순열 $\mu=\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\mu_5\mu_6\mu_7=1245763$이다.

예제 2.3.6 다음 등식을 증명하라.

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$$

풀이» 1, 2, ⋯, n, $n+1$의 순열을 사전식순서로 나열할 때 맨 마지막에 오는 순열을 π라 하자. 그러면 $\pi=\pi_1\pi_2\cdots\pi_n\pi_{n+1}=(n+1)n\cdots 21$이고

$$rank(\pi)=(n+1)!-1$$

이다. 한편, 사전식 나열에서 $rank(\pi)$를 구할 때 모든 $a_i=|\{j\,|\,\pi_j<\pi_i,\ j<i\}|=0$ $(i=1,\cdots,n)$이므로

$$\begin{aligned} rank(\pi)&=n\cdot n!+(n-1)\cdot(n-1)!+\cdots+2\cdot 2!+1\cdot 1! \\ &=(n+1)!-1 \end{aligned}$$

이다. □

문제 2.3.6

n이 자연수일 때 $0\le m\le(n+1)!-1$인 정수 m은 다음과 같은 형태로 유일하게 표현됨을 보여라.

$$m=c_1\cdot 1!+c_2\cdot 2!+\cdots+c_n\cdot n!\ (\text{단}, 0\le c_i\le i)$$

이제 1, 2, ⋯, n의 모든 순열을 Johnson과 Trotter가 개발한 **J-T순서**로 나열하는 방법에 대하여 알아보자. 이 방법은 다음과 같이 귀납적으로 정의된다.

① $n=1$이면 1, $n=2$이면 12, 21로 나열된다.

② 1, 2, ⋯, $n-1$의 모든 순열이 J-T순서로 나열되었다고 하자.

③ 이제 위 ②에 나열된 각 π에 대하여 π의 숫자와 숫자 사이에 다음과 같은 방법으로 n을 끼워 넣어 1, 2, ⋯, n의 모든 순열을 만든다.

경우 1 : π가 홀수 번째 순열이면 π의 오른쪽 끝에 n을 넣은 다음 한 칸씩 왼쪽으로 이동하며 n을 넣어 n개의 새로운 순열을 만든다.

경우 2 : π가 짝수 번째 순열이면 π의 왼쪽 끝에 n을 넣은 다음 한 칸씩 오른쪽으로 이동하며 n을 넣어 n개의 새로운 순열을 만든다.

아래 그림은 순열 $\pi=\square\ \square\ \square\cdots\square\ \square\ \square$일 때 n을 끼워 넣는 방법을 나타낸 그림이다.

경우 1	경우 2
$\square\ \square\ \square\cdots\square\ \ n$	$n\ \ \square\ \square\cdots\square\ \square\ \square$
$\square\ \square\ \square\cdots\ n\ \ \square$	$\square\ \ n\ \ \square\cdots\square\ \square\ \square$
$\vdots$	$\vdots$
$\square\ \square\ \ n\cdots\square\ \square$	$\square\ \square\ \square\cdots\ n\ \ \square\ \square$
$\square\ \ n\ \ \square\cdots\square\ \square$	$\square\ \square\ \square\cdots\square\ \ n\ \ \square$
$n\ \ \square\ \square\cdots\square\ \square$	$\square\ \square\ \square\cdots\square\ \square\ \ n$

그림 2.3.1

예를 들어 $n=2$이면

$$12,\ 21$$

이다. 이 순서를 이용하여 $n=3$일 때 모든 순열을 J-T순서로 나열하여 보자. 12는 홀수 번째이므로 12의 오른쪽 끝부터 3을 끼워 넣어 새로운 순열을 만든다(표 2.3.1의 (a)). 또 21은 짝수 번째이므로 21의 왼쪽 끝부터 3을 끼워 넣어 새로운 순열을 만든다(표 2.3.1의 (b)). 이렇게 만들어진 순열을 이어 만든 나열이 J-T순서로 1, 2, 3의 모든 순열을 나열한 것이다(표 2.3.1의 (c)).

(a)	(c)
1 2 ③	1 2 ③
1 ③ 2	1 ③ 2
③ 1 2	③ 1 2
	③ 2 1
(b)	2 ③ 1
③ 2 1	2 1 ③
2 ③ 1	
2 1 ③	

표 2.3.1

위의 표에서 보듯이 J-T순서로 순열을 나열하면 순열은 바로 전 순열의 인접한 두 숫자를 서로 바꾸어 얻어진 것임을 알 수 있다.

J-T순서로 $rank(\pi)$는 순열 π의 앞에 나열되는 순열의 수이다. 예를 들어 J-T순서로 $rank(123)=0$, $rank(213)=5$이다.

예제 2.3.7 $n=4$인 경우 J-T순서로 마지막 순열은 2134이다. 이 사실을 이용하여 $n=5$인 경우 J-T순서의 마지막 순열 π와 $rank(\pi)$를 구하여라.

풀이» $rank(\pi)$는 순열 π의 앞에 나열된 순열의 수이므로

$$rank(\pi)=5!-1=120-1=119$$

이다. 또 $n=4$일 때 마지막 순열 2134는 $4!$번째, 즉 짝수 번째이므로 왼쪽 끝부터 5를 붙이게 된다. 따라서 $n=5$일 때 마지막 순열 $\pi=21345$이다. □

문제 2.3.7

$1, 2, \cdots, n$의 모든 순열을 J-T순서로 나열할 때 마지막 순열을 구하여라.

예제 2.3.8 $\pi=1457326$라 하자. J-T순서로 나열할 때 π의 바로 다음 순열과 $rank(\pi)$를 구하여라.

풀이» $\pi=1457326$ 바로 다음 순열은 π에서 7을 뺀 순열 145326의 $rank$가 짝수이면 1475326이고, 홀수이면 1453726이다. 따라서 순열 145326의 $rank$를 알아야 하고, 또 이를 알기 위해서는 145326에서 6을 뺀 순열 14532의 $rank$를 알아야 한다. 이와 같은 과정을 반복하여 π의 바로 다음 순열을 알기 위해서는 순열 π에서 차례로 7, 6, 5, 4, 3을 뺀 145326, 14532, 1432, 132, 12의 $rank$를 알아야 한다. 한편,

$$rank(12)=0$$
$$rank(132)=1$$
$$rank(1432)=4+1=5$$
$$rank(14532)=5\times 5+2=27$$
$$rank(145326)=27\times 6+5=167$$

이다. $rank(145326)=167$이 홀수이므로 π의 바로 다음 순열은 1453726이고

$$rank(1457326)=167\times 7+3=1172$$

이다. □

문제 2.3.8

$\pi=41532$라 하자. J-T나열에서 π의 바로 다음 순열과 $rank(\pi)$를 구하여라.

예제 2.3.9 π가 $1, 2, \cdots, n$으로 이루어진 하나의 순열일 때 π에서 n을 제외한 순열을 π'이라 하자. 순열 π에서 n이 왼쪽에서 j번째에 위치한다면 J-T나열에서

$$rank(\pi)=\begin{cases} n\cdot rank(\pi')+n-j & (rank(\pi')\text{이 짝수}) \\ n\cdot rank(\pi')+j-1 & (rank(\pi')\text{이 홀수}) \end{cases}$$

임을 보여라.

풀이≫ $rank(\pi')$이 짝수이면 순열 π'의 오른쪽에 n을 첨가한 순열 $\pi'n$의 $rank$는

$$rank(\pi'n)=n\cdot rank(\pi')$$

이고 순열 π는 $\pi'n$에서 n을 $(n-j)$번 왼쪽으로 옮긴 것이므로

$$rank(\pi)=n\cdot rank(\pi')+n-j$$

이다.

한편, $rank(\pi')$이 홀수이면 순열 π'의 왼쪽에 n을 첨가한 순열 $n\pi'$의 $rank$는

$$rank(n\pi')=n\cdot rank(\pi')$$

이고 순열 π는 $n\pi'$에서 n을 $(j-1)$번 오른쪽으로 옮긴 것이므로

$$rank(\pi)=n\cdot rank(\pi')+j-1$$

이다. □

문제 2.3.9

J-T순서에서 $rank(7321456)$을 구하여라.

예제 2.3.10 $n=5$일 때 J-T나열에서 $rank(\pi)=46$인 순열 π를 구하여라.

풀이>> 46을 5로 나누면 그 몫이 홀수 9이므로 예제 2.3.9에 의하여

$$46=5\cdot 9+1=5\cdot 9+(j-1)$$

이고, 따라서 $j-1=1$, 즉 $j=2$이며 π는

$$\pi=\bigcirc 5 \bigcirc \bigcirc \bigcirc$$

의 형태이다.

다시 9를 4로 나누면 그 몫이 짝수 2이므로

$$9=4\cdot 2+1=4\cdot 2+(4-j)$$

이다. 따라서 $j=3$이며 π는

$$\pi=\bigcirc 5 \bigcirc 4 \bigcirc$$

의 형태이다.

이런 과정을 반복하면

$$2=3\cdot 0+2=3\cdot 0+(3-j) \text{ 에서 } j=1,$$

$$\pi = 35\bigcirc 4 \bigcirc$$

이 되고

$$0 = 2\cdot 0 + 0 = 2\cdot 0 + (2-j) \text{ 에서 } j = 2,$$
$$\pi = 35\bigcirc 42$$

이므로 결국 $\pi = 35142$이다. □

문제 2.3.10

$n=6$일 때 J-T순서에서 $rank(\pi)=46$인 순열 π를 구하여라.

위의 예제 2.3.10의 풀이 과정을 알고리즘으로 나타내어 보자.

(J-T순서에서 *rank*를 알고 순열 구하기) $1, 2, \cdots, n$의 순열을 J-T순서로 나열할 때 $rank$가 m인 순열은 다음 알고리즘에 의하여 결정된다.

① m을 n으로 나눌 때 몫을 q_0, 나머지를 r_0이라 하자.
  몫 q_0가 홀수이면 왼쪽에서 (r_0+1)번째 숫자가 n
  몫 q_0가 짝수이면 왼쪽에서 $(n-r_0)$번째 숫자가 n
② q_0를 $(n-1)$로 나눌 때 몫을 q_1, 나머지를 r_1이라 하자.
  몫 q_1이 홀수이면 (n의 자리를 제외하고) 왼쪽에서 (r_1+1)번째 숫자가 $n-1$
  몫 q_1이 짝수이면 (n의 자리를 제외하고) 왼쪽에서 $(n-1-r_1)$번째 숫자가 $n-1$
③ 위와 같은 방법을 계속하여
  q_{n-3}를 2로 나눌 때 몫이 q_{n-2}, 나머지를 r_{n-2}이라 하자.
  몫 q_{n-2}이 홀수이면 ($n, \cdots, 3$의 자리를 제외하고) $(r_{n-2}+1)$번째 숫자가 2
  몫 q_{n-2}이 짝수이면 ($n, \cdots, 3$의 자리를 제외하고) $(2-r_{n-2})$번째 원소가 2
④ 나머지 하나의 빈자리가 1이 된다.

이제 J-T순서에서 주어진 순열의 $rank$를 구하는 알고리즘을 알아보자. 예제 2.3.8에서 순열 1457326의 $rank$를 구하기 위해서는 1457326에서 차례로 7, 6, 5, 4, 3을 뺀

순열 145326, 14532, 1432, 132, 12의 $rank$를 알아야 했다. 순열 1457326에서 7은 7보다 앞에 있는 숫자의 개수보다 하나 더 많은 4번째에 위치한다. 또, 그 다음 순열 145326에서 6은 6보다 앞에 있는 숫자의 개수보다 하나 더 많은 6번째에 위치한다. 이 사실을 이용하여 주어진 순열의 $rank$를 다음과 같이 구할 수 있다.

(J-T순서에서 순열을 알고 $rank$ 구하기) π를 $\pi_1\pi_2\cdots\pi_n$의 순열이라 하자. J-T순서에서 $rank(\pi)$는 다음 알고리즘에 의하여 출력되는 R로 결정된다.

① 각 자연수 j에 대하여 $j=\pi_k$를 찾아

$$a_j=|\{i\,|\,i<k,\ \pi_i<j\}|+1, \qquad j=1, 2, \cdots, n$$

의 값을 구한다.

② $R \leftarrow 0$ (초기조건)

③ 차례대로 i는 1부터 n까지 다음을 반복한다.

$$R \leftarrow \begin{cases} i\cdot R+i-a_i & (R\text{이 짝수}) \\ i\cdot R+a_i-1 & (R\text{이 홀수}) \end{cases}$$

④ R을 출력

예를 들어 $\pi=1457326$이면

$$1=\pi_1,\ 2=\pi_6,\ 3=\pi_5,\ 4=\pi_2,\ 5=\pi_3,\ 6=\pi_7,\ 7=\pi_4$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned}
a_1&=|\{i\,|\,i<1,\ \pi_i<1\}|+1=|\phi|+1=1\\
a_2&=|\{i\,|\,i<6,\ \pi_i<2\}|+1=|\{1\}|+1=2\\
a_3&=|\{i\,|\,i<5,\ \pi_i<3\}|+1=|\{1\}|+1=2\\
a_4&=|\{i\,|\,i<2,\ \pi_i<4\}|+1=|\{1\}|+1=2\\
a_5&=|\{i\,|\,i<3,\ \pi_i<5\}|+1=|\{1, 2\}|+1=3\\
a_6&=|\{i\,|\,i<7,\ \pi_i<6\}|+1=|\{1, 2, 3, 5, 6\}|+1=6\\
a_7&=|\{i\,|\,i<4,\ \pi_i<7\}|+1=|\{1, 2, 3\}|+1=4
\end{aligned}$$

이다. 이 값을 이용하여 $R_0=0$으로 두고 R의 값을 차례로 계산하면

$$R_1 = 1\times0+1-1=0$$
$$R_2 = 2\times0+2-2=0$$
$$R_3 = 3\times0+3-2=1$$
$$R_4 = 4\times1+2-1=5$$
$$R_5 = 5\times5+3-1=27$$
$$R_6 = 6\times27+6-1=167$$
$$R_7 = 7\times137+4-1=1172$$

이므로 $rank(\pi)=1172$이다.

아래 그림은 J-T 순서로 순열 2431에 도달하는 길을 나타낸 수형도이다.

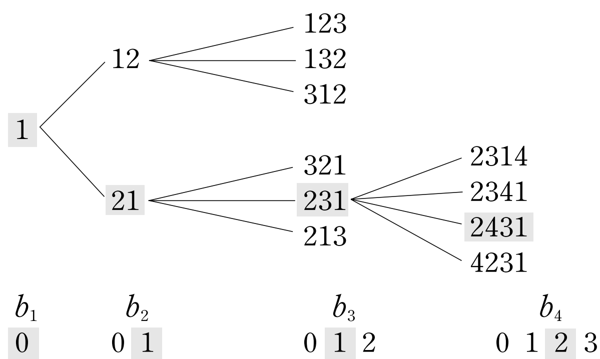


그림 2.3.2

순열 2431에 도달하는 길은

$$1 \longrightarrow 21 \longrightarrow 231 \longrightarrow 2431$$

이다. 이제 1로 이루어진 순열 중 1 앞에 나열되는 순열의 개수는 **0**이고 1, 2의 순열 중에서 21 앞에 나열되는 순열의 개수는 **1**이다. 또 1, 2, 3의 순열 중에서 2, 1의 순서를 유지하면서 231 앞에 나열되는 순열의 개수는 **1**이며 1, 2, 3, 4의 순열 중에서 2, 3, 1의 순서를 유지하면서 2431 앞에 나열되는 순열의 개수는 **2**이다. 그러므로 순열 2431에 도달하는 길은 벡터 (0, 1, 1, 2)로 쓸 수 있고, 역으로 이런 벡터가 주어지면 이 벡터를 이용하여 어떤 순열에 도달하는 길을 찾을 수 있다.

J-T순서에서, 순열 2431 앞에 나열되는 순열의 수는 $rank(2431)=4\times4+2=18$이다. 벡터 (b_1, b_2, b_3, b_4)로 도달할 수 있는 순열보다 앞에 나열되는 순열의 개수는

$$b_2\frac{4!}{2!}+b_3\frac{4!}{3!}+b_4\frac{4!}{4!} \quad (\text{단}, 0\le b_i\le i-1)$$

이다. 예를 들어, 벡터 (0, 1, 1, 2)로 도달하는 순열 2431의 $rank$인 18은

$$18=1\cdot\frac{4!}{2!}+1\cdot\frac{4!}{3!}+2\cdot\frac{4!}{4!}$$

임을 알 수 있다.

일반적으로 $0\le m\le n!-1$인 정수 m은 다음과 같은 형태로 유일하게 표현된다.

$$m=b_2\frac{n!}{2!}+b_3\frac{n!}{3!}+\cdots+b_n\frac{n!}{n!} \quad (\text{단}, 0\le b_i\le i-1)$$

예제 2.3.11 J-T나열에서 순열 $rank(1457326)=1172$이다. J-T 나열을 나타내는 수형도에서 순열 1457326에 이르는 길을 나타내는 벡터 $(b_1, \cdots, b_7)$을 구하여라.

풀이》 $(b_1, \cdots, b_7)$가 J-T순서로 나타내는 수형도에서 순열 1457326에 이르는 길의 벡터라면

$$1172=b_2\frac{7!}{2!}+b_3\frac{7!}{3!}+b_4\frac{7!}{4!}+b_5\frac{7!}{5!}+b_6\frac{7!}{6!}+b_7\frac{7!}{7!} \quad (0\le b_i\le i-1) \tag{3.1}$$

이다. 그러므로 b_7은 1172를 7로 나눈 나머지이기 때문에

$$1172=7\cdot167+3$$

에서 $b_7=3$이다. (3.1)의 양변에서 $b_7=3$을 뺀 다음 7로 나누면

$$167=b_2\frac{6!}{2!}+b_3\frac{6!}{3!}+b_4\frac{6!}{4!}+b_5\frac{6!}{5!}+b_6\frac{6!}{6!} \quad (0\le b_i\le i-1) \tag{3.2}$$

이고 b_6은 167를 6으로 나눈 나머지 5이다. (3.2)의 양변에서 $b_6=5$를 뺀 다음

다시 6으로 나누면

$$27=b_2\frac{5!}{2!}+b_3\frac{5!}{3!}+b_4\frac{5!}{4!}+b_5\frac{5!}{5!} \quad (0\le b_i\le i-1) \tag{3.3}$$

이고 같은 방법을 계속 적용하면 $b_5=2, b_4=1, b_3=1, b_2=0, b_1=0$이 되어

$$(b_1, \cdots, b_7)=(0, 0, 1, 1, 2, 5, 3)$$

이다. □

문제 2.3.11

자연수 100은 다음과 같은 형태로 유일하게 표현된다.

$$100=b_1\frac{5!}{1!}+b_2\frac{5!}{2!}+b_3\frac{5!}{3!}+b_4\frac{5!}{4!}+b_5\frac{5!}{5!} \quad (0\le b_i\le i-1)$$

이때, $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$을 구하여라.

MATHEMATICA

(1) 사전식순서

1 매스매티카에서

Permutations[{1, 2, 3}]

을 입력하면 아래와 같이 1, 2, 3의 모든 순열이 사전식순서로 나열된다.

{1,2,3}, {1,3,2}, {2,1,3}, {2,3,1}, {3,1,2}, {3,2,1}

2 부록 B−2는 사전식순서에서 주어진 순열의 rank 구하는 알고리즘이다.

lexrankper[{2, 1, 3, 6, 4, 5, 7}]

을 입력하면 사전식순서에서 순열 2136457의 rank

732

가 출력된다.

3 B−3은 사전식순서에서 rank를 알고 순열을 구하는 알고리즘이다. 여기서

unlexrankper[35, 7]

를 입력하면 n=7일 때 사전식 순서에서 rank(μ)=35인 μ가 아래처럼 출력된다.

{1, 2, 4, 5, 7, 6, 3}

(2) J−T순서

1 B−4는 J−T순서로 순열을 나열하는 알고리즘이다. 여기서

jtperlist[3]

을 입력하면 1, 2, 3의 모든 순열이 아래처럼 J−T순서로 나열된다.

{1,2,3}, {1,3,2}, {3,1,2}, {3,2,1}, {2,3,1}, {2,1,3}

2 B−5는 J−T순서에서 주어진 순열의 rank를 구하는 알고리즘이다. 여기서

jtrankper[{1, 4, 5, 7, 3, 2, 6}]

로 입력하면 J−T순서에서 rank(1457326)의 값

1172

가 출력된다.

③ B−6은 J−T순서에서 rank를 알고 순열을 구하는 알고리즘이다. 여기서

unjtrankper[46 , 5]

를 입력하면 n=5일 때 rank(μ)=46인 μ가 아래처럼 출력된다.

{3, 5, 1, 4, 2}

지금까지 사전식순서와 J-T순서로 순열을 나열하는 방법에 대하여 알아보았다. 이제 조합의 나열에 대해 알아보자. 우선 조합을 조합에 나타난 숫자를 크기 순서대로 배열하자. 조합을 나열하는 방법은 앞의 순열의 나열에서 살펴보았던 **사전식순서**와 뒤부터 숫자를 비교하여 더 작은 것이 앞에 나열되는 **colex순서(colexicographic order)**가 있다. 예를 들어 1, 2, 3, 4, 5에서 세 수를 뽑는 10개의 조합을 사전식 순서로 나열하면 다음과 같다.

123　124　125　134　135　145　234　235　245　345

그러나 colex순서를 이용하면 조합 235와 145의 끝자리수는 모두 5로 같기 때문에 그 앞의 수 3과 4를 비교하고 3 < 4이므로 235 < 145이다. colex순서로 위의 모든 조합을 나열하면 다음과 같다.

123　124　134　234　125　135　235　145　245　345

예제 2.3.12 사전식순서와 colex순서를 이용하여 다음 조합의 순서를 비교하여라.

(1) 17589와 24579

(2) 13479와 12379

풀이>> (1) 사전식순서 : 17589 < 24579　colex순서 : 24579 < 17589

(2) 사전식순서 : 12379 < 13479　colex순서 : 12379 < 13479 □

문제 2.3.12

다음 조합을 각각 사전식순서와 colex순서로 비교하여라.

(1) 26583과 24579

(2) 13789와 12789

예제 2.3.13 1, 2, $\cdots$, 9에서 5개를 뽑는 조합을 아래에 주어진 순서로 나열할 때 15689의 바로 다음 조합을 구하여라.

(1) 사전식순서

(2) colex순서

풀이>> (1) 15689에서 넷째자리와 다섯째자리에 있는 숫자는 각각 8과 9이고 더 이상 크게 할 수 없다. 세째자리에 있는 숫자 6을 1만큼 늘려 7로 바꾸면 $7<8$이므로 사전식나열에서 15689 바로 다음 조합은 15789이다.

(2) 5689로 끝나는 조합은 15689, 25689, 35689, 45689이고 colex순서에서

$$15689<25689<35689<45689$$

이므로 15689 바로 다음에 나오는 조합은 25689이다. □

문제 2.3.13

1, 2, $\cdots$, 9에서 5개를 뽑는 조합을 아래에 주어진 순서로 나열할 때 23678의 바로 다음 조합을 구하여라.

(1) 사전식순서

(2) colex순서

위의 예제 2.3.13처럼 1, 2, $\cdots$, n에서 k개를 뽑는 조합을 각각 사전식순서와 colex순서로 나열할 때 조합

$$v_1v_2\cdots v_k \quad (\text{단}, 1\leq v_1<v_2<\cdots<v_k\leq n)$$

의 바로 다음 조합은 아래 알고리즘으로 구할 수 있다.

(사전식순서에서 주어진 조합의 바로 다음 조합 구하기) $v_1v_2\cdots v_k$를 $1, 2, \cdots, n$에서 k개를 뽑은 조합이라 하자.

① 모든 i에 대하여 $v_i=(n-k+i)$이면 $v_1v_2\cdots v_k$는 맨 마지막으로 바로 다음 조합은 없다.
② 위 ①이 아니면 $v_j+1\neq v_1, v_2, \cdots, v_k$이고 $v_j\neq n$인 j값 중 최대를 m이라 하자. 그러면 조합 $v_1v_2\cdots v_{m-1}(v_m+1)(v_m+2)\cdots(v_m+k-m+1)$이 $v_1v_2\cdots v_k$의 바로 다음에 나오는 조합이다.

위의 알고리즘을 이용하여 $n=9$, $k=5$일 때 56789와 15689의 바로 다음 조합을 구하여 보자. 우선 56789는 사전식나열에서 맨 마지막 조합이므로 다음 조합은 없다. 한편, 조합 $v_1v_2v_3v_4v_5=15689$에서 $v_j+1\neq v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$이고 $v_j\neq 9$인 j는 1과 3이고 이 중 최대는 3이므로 $m=3$이다. 그러므로 15689의 바로 다음 조합은 $v_1v_2(v_3+1)(v_3+2)(v_3+3)=15789$이다.

(colex순서에서 주어진 조합의 바로 다음 조합 구하기) $v_1v_2\cdots v_k$를 $1, 2, \cdots, n$에서 k개를 뽑은 조합이라 하자.

① 모든 i에 대하여 $v_i=(n-k+i)$이면 $v_1v_2\cdots v_k$는 맨 마지막으로 바로 다음 조합은 없다.
② 위 ①이 아니면 $v_j+1\neq v_1, v_2, \cdots, v_k$이고 $v_j\neq n$인 j값 중 최소를 m이라 하자. 그러면 조합 $12\cdots(m-1)(v_m+1)v_{m+1}\cdots v_k$가 $v_1v_2\cdots v_k$의 바로 다음에 나오는 조합이다.

위의 알고리즘을 이용하여 $n=9$, $k=5$일 때 15689의 바로 다음 조합을 구하여 보자. 조합 $v_1v_2v_3v_4v_5=15689$에서 $v_j+1\neq v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$이고 $v_j\neq 9$인 j는 1과 3이고 이 중 최소는 1이므로 $m=1$이다. 그러므로 15689의 바로 다음에 오는 조합은 $(v_1+1)v_2v_3v_4v_5=25689$이다.

$v=v_1v_2\cdots v_k$를 $1, 2, \cdots, n$에서 k개를 뽑은 하나의 조합이라 하자. 이제 각각 사전식나열과 colex나열에서 $v=v_1v_2\cdots v_k$ 앞에 나열되는 조합의 수 $lexrank(v)$와 $colexrank(v)$에 대하여 알아보자.

정리 2.3.2

n, k를 $n \geq k$인 자연수라고 하자.

(1) $v=v_1v_2\cdots v_k$를 $1, 2, \cdots, n$에서 k개를 뽑은 조합일 때

$$colexrank(v)=\sum_{i=1}^{k}\binom{v_i-1}{i}$$

이다. 그러므로 $colexrank(v)$는 n의 값에 의존하지 않는다.

(2) $0 \leq m \leq \binom{n}{k}-1$인 정수 m에 대하여

$$m=\sum_{i=1}^{k}\binom{v_i-1}{i}$$

인 유일한 조합 $v=v_1v_2\cdots v_k(1\leq v_1<v_2<\cdots<v_{k-1}<v_k\leq n)$가 존재한다.

【증명】 (1) colex나열에서 $v=v_1v_2\cdots v_k$ 앞에 나열되는 조합은 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

경우 1 : 마지막 숫자가 v_k보다 작은 경우

$1, 2, \cdots, v_k-1$에서 임의로 k개를 뽑아 만들 수 있으므로 이런 경우의 조합의 수는

$$\binom{v_k-1}{k}$$

이다.

경우 2 : 마지막 숫자가 v_k인 경우

조합 $v'=v_1v_2\cdots v_{k-1}$의 앞에 나열되는 각각의 조합 맨 뒤에 v_k를 첨가하여 만들 수 있으므로 이런 조합의 수는 $colexrank(v')$이다.

위의 두 경우는 동시에 일어나지 않으므로 합의 법칙에 의해

$$colexrank(v)=\binom{v_k-1}{k}+colexrank(v')$$

이고 이 점화식을 풀면

$$colexrank(v)=\binom{v_k-1}{k}+\binom{v_{k-1}-1}{k-1}+\cdots+\binom{v_1-1}{1}=\sum_{i=1}^{k}\binom{v_i-1}{i}$$

이다.

(2) $1, 2, \cdots, n$에서 k개를 뽑은 조합을 colex순서로 나열할 때 $m+1$번째로 나오는 조합을 $v=v_1v_2\cdots v_k$라 하면 v는 유일하게 결정된다.
한편, $colexrank(v)=m$이고 위의 (1)에 의하여

$$m=colexrank(v)=\sum_{i=1}^{k}\binom{v_i-1}{i}$$

이다. □

예제 2.3.14 조합 $v=247$의 $colexrank(v)$를 구하여라.

풀이》 정리 2.3.2 의해

$$colexrank(v)=colexrank(247)=\binom{2-1}{1}+\binom{4-1}{2}+\binom{7-1}{3}=24$$ □

문제 2.3.14

조합 3469의 $colexrank(v)$를 구하여라.

이제 주어진 음이 아닌 정수 m에 대하여 $colexrank(v)=m$인 조합 v를 구하는 알고리즘을 생각하여 보자.

(colex순서에서 $colexrank$를 알고 조합 구하기) n, k를 자연수라 하고 m을 $0\leq m\leq\binom{n}{k}-1$인 정수라 하자. 그러면 $colexrank(v)=m$인 조합 $v=v_1v_2\cdots v_k$는 다음 알고리즘에 의하여 결정된다.

① $\binom{i}{k} \leq m < \binom{i+1}{k}$인 i를 구하여 $v_k = i+1$이라 한다.

② $\binom{i}{k-1} \leq m - \binom{v_k - 1}{k} < \binom{i+1}{k-1}$인 i를 구하여 $v_{k-1} = i+1$이라 한다.

③ 이를 반복하여

$$i = \binom{i}{1} \leq m - \sum_{j=2}^{k} \binom{v_j - 1}{j} < \binom{i+1}{1} = i+1$$

인 i를 구하여 $v_1 = i+1$이라 한다.

위의 알고리즘을 이용하여 $n=7$, $k=3$일 때 $colexrank(v) = 24$인 조합 v를 구하여 보자.

(i) $\binom{6}{3} \leq 24 < \binom{6+1}{3}$이므로 $v_3 = 6+1 = 7$이다.

(ii) $\binom{3}{2} \leq 24 - \binom{6}{3} = 4 < \binom{3+1}{2}$이므로 $v_2 = 3+1 = 4$이다.

(iii) $\binom{1}{1} \leq 24 - \binom{6}{3} - \binom{3}{2} = 1 < \binom{1+1}{1}$이므로 $v_1 = 1+1 = 2$이다.

그러므로 구하는 조합은 $v = v_1 v_2 v_3 = 247$이다.

예제 2.3.15 위의 colex나열에서 $colexrank$ 알고 조합 구하는 알고리즘에 의하여 구해진 $v_1, v_2, \cdots, v_k$는

$$v_1 < v_2 < \cdots < v_k$$

임을 보여라.

풀이>> 위의 알고리즘에서 $j = k, k-1, \cdots, 1$에 대해

$$\binom{v_j-1}{j} \le m < \binom{v_j}{j},\ \binom{v_{j-1}-1}{j-1} \le m - \binom{v_j-1}{j} < \binom{v_{j-1}}{j-1}$$

이 되도록 v_j, v_{j-1}이 선택되었다. 따라서

$$\binom{v_{j-1}-1}{j-1} + \binom{v_j-1}{j} \le m < \binom{v_j}{j}$$

이고

$$\binom{v_{j-1}-1}{j-1} < \binom{v_j}{j} - \binom{v_j-1}{j} = \binom{v_j-1}{j-1}$$

이므로 $v_{j-1} < v_j$이다. □

문제 2.3.15

다음 등식이 성립함을 보여라.

$$1 + \sum_{i=1}^{k} \binom{n+i-k-1}{i} = \binom{n}{k}$$

이제 $v = v_1 v_2 \cdots v_k$가 $1, 2, \cdots, n$에서 k개를 뽑은 조합일 때 $colexrank(v)$을 이용하여 $lexrank(v)$를 구해보자.

정리 2.3.3

$1, 2, \cdots, n$에서 k개를 뽑은 모든 조합의 집합을 X라 하자. X에서 X로 가는 함수 $\sigma : X \to X$를 다음과 같이 정의하자.

$$\sigma(v) = v' = v_1' v_2' \cdots v_k' \quad (v = v_1 v_2 \cdots v_k \in X)$$

여기서

$$v_1' = (n+1) - v_k, \cdots, v_i' = (n+1) - v_{k+1-i}, \cdots, v_k' = (n+1) - v_1$$

이다. 그러면

(1) $(\sigma\circ\sigma)(v)=v \qquad (v=v_1v_2\cdots v_k\in X)$

(2) $colexrank(v)<colexrank(w) \Leftrightarrow lexrank(\sigma(v))>lexrank(\sigma(w))$

(3) $lexrank(v)=\binom{n}{k}-1-colexrank(\sigma(v))$

【증명】 (1) $(\sigma\circ\sigma)(v)=v_1''v_2''\cdots v_k''$라 하면

$$\begin{aligned}v_i''&=(n+1)-v'_{k+1-i}=(n+1)-[(n+1)-v_{(k+1)-(k+1-i)}]\\&=v_i\end{aligned}$$

이므로 $(\sigma\circ\sigma)(v)=v$이다.

(2) $v=v_1v_2\cdots v_k$, $w=w_1w_2\cdots w_k$를 X의 원소라 할 때

$$\sigma(v)=v'=v_1'v_2'\cdots v_k'$$
$$\sigma(w)=w'=w_1'w_2'\cdots w_k'$$

라 하자. $colexrank(v)<colexrank(w)$이면 $v_k<w_k$이거나

$$(v_j, v_{j+1}, \cdots, v_k)=(w_j, w_{j+1}, \cdots, w_k),\ v_{j-1}<w_{j-1}$$

인 j가 존재한다. (단, $2\le j\le k$)

경우 1 : $v_k<w_k$인 경우

$$w_1'=(n+1)-w_k<(n+1)-v_k=v_1'$$

이므로 $lexrank(\sigma(v))>lexrank(\sigma(w))$이다.

경우 2 : $(v_j, v_{j+1}, \cdots, v_k)=(w_j, w_{j+1}, \cdots, w_k)$, $v_{j-1}<w_{j-1}$인 경우

$$(v_1', v_2', \cdots, v'_{k-j+1})=(w_1', w_2', \cdots, w'_{k-j+1}),$$
$$w'_{k-j+2}=(n+1)-w_{j-1}<(n+1)-v_{j-1}=v'_{k-j+2}$$

이므로 $lexrank(\sigma(v))>lexrank(\sigma(w))$이다.

마찬가지로 $lexrank(\sigma(v))>lexrank(\sigma(w))$이면

$colexrank(v)>\ colexrank(w)$임을 보일 수 있으므로

$$colexrank(v)<colexrank(w) \Leftrightarrow lexrank(\sigma(v))>lexrank(\sigma(w))$$

이다.

(3) 위 (2)로부터 X의 모든 원소를 사전식으로 나열하는 방법은

① X의 모든 원소를 colex순서로 나열하고

② 나열된 각 조합 v에 대한 $\sigma(v)$를 구하여

③ 순서를 거꾸로 나열한다.

예를 들어 $n=5$이고 $k=3$일 때 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$에서 3개를 뽑는 조합의 집합 X의 모든 원소를 colex순서로 나열하면

$$123 \quad 124 \quad 134 \quad 234 \quad 125 \quad 135 \quad 235 \quad 145 \quad 245 \quad 345$$

이다. 위의 각 조합의 σ의 함수값을 차례로 나열하면

$$345 \quad 245 \quad 235 \quad 234 \quad 145 \quad 135 \quad 134 \quad 125 \quad 124 \quad 123$$

이며 이 나열의 순서를 거꾸로 한

$$123 \quad 124 \quad 125 \quad 134 \quad 135 \quad 145 \quad 234 \quad 235 \quad 245 \quad 345$$

가 X의 모든 원소를 사전식순서로 나열한 것이다.

그러므로 사전식배열에서 조합 v의 앞에 나열된 조합의 수 $lexrank(v)$는 colex 배열에서 $\sigma(v)$ 뒤에 있는 조합의 수이므로

$$lexrank(v)=\binom{n}{k}-1-colexrank(\sigma(v))$$

이다. □

예제 2.3.16 $n=7, k=3$일 때 조합 $v=247$의 $lexrank(v)$를 구하여라.

풀이>> 정리 2.3.3과 예제 2.3.14에 의하여

$$\begin{aligned} lexrank(146) &= \binom{7}{3}-1-colexrank(\sigma(146)) \\ &= \binom{7}{3}-1-colexrank(247) \\ &= \binom{7}{3}-1-24=10 \end{aligned}$$

□

문제 2.3.16

$n=7, k=3$일 때 $lexrank(v)=20$인 조합 v를 구하여라.

MATHEMATICA

부록 B에서

(1) 사전식 순서

1 B−7은 사전식순서로 모든 조합을 나열하는 알고리즘이다. 여기서

lexcomlist[5,3]

을 입력하면 1, 2, ⋯, 5에서 3개를 뽑는 조합이 아래처럼 사전식순서로 나열된다.

{1,2,3},{1,2,4},{1,2,5},{1,3,4},{1,3,5},{1,4,5},{2,3,4},{2,3,5},{2,4,5},{3,4,5}

2 B−8은 사전식순서에서 조합의 lexrank를 구하는 알고리즘이다. 여기서

lexrankcom[7, {1,4,6}]

을 입력하면 1, 2, ⋯, 7에서 3개를 뽑는 조합 146의 lexrank

10

이 출력된다.

3 B−9는 사전식순서에서 lexrank 알고 조합을 구하는 알고리즘이다.

unlexrankcom[7,3,20]

을 입력하면 1, 2, ⋯, 7에서 3개를 뽑는 조합을 사전식순서로 나열할 때 lexrank가 20인 조합

{2, 4, 6}

이 출력된다.

(2) colex 순서

1 B−10은 colex순서로 모든 조합을 나열하는 알고리즘이다. 여기서

colexcomlist[5,3]

을 입력하면 1, 2, ⋯, 5에서 3개를 뽑는 조합이 아래처럼 colex순서로 나열된다.

{1,2,3},{1,2,4},{1,3,4},{2,3,4},{1,2,5},{1,3,5},{2,3,5},{1,4,5},{2,4,5},{3,4,5}

2 B−11은 colex순서에서 조합의 colexrank를 구하는 알고리즘이다. 여기서

colexrankcom[{2,4,7}]

을 입력하면 조합의 colex순서에서 조합 247의 colexrank

24

가 출력된다.

3 B−12는 colex순서에서 colexrank를 알고 조합을 구하는 알고리즘이다.

uncolexrankcom[3, 24]

를 입력하면 세 수로 이루어진 조합을 colex순서로 나열할 때 colexrank가 24인 조합

{2, 4, 7}

이 출력된다.

이제 집합 $[n]=\{1, 2, \cdots, n\}$의 모든 부분집합을 나열할 수 있는 방법에 대하여 생각하여 보자. 물론 앞에서 살펴본 대로 $0 \leq k \leq n$인 모든 k에 대하여 $[n]$에서 뽑은 조합을 나열한 후 나열된 모든 조합을 이어 나열하면 $[n]$의 모든 부분집합을 나열할 수 있다. 여기서는 집합 $\{0, 1\}$을 n번 곱한 곱집합 $\{0, 1\}^n$의 원소를 나열하는 방법을 알아보고 이를 이용하여 $[n]$의 모든 부분집합을 나열한다.

정의 2.3.4 집합 $A_1, A_2, \cdots, A_n$의 **곱집합**은

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \cdots, x_n \in A_n\}$$

로 정의된다. 또 집합 A를 n번 곱한 곱집합 $A \times A \times \cdots \times A$는 A^n으로 나타낸다.

이 절의 남은 부분에서는 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$으로 쓰기로 한다.

곱집합 $\{0, 1\}^n$의 원소를 나열하는 방법을 알려주는 Gray Code 방식은 다음과 같이 귀납적으로 정의된다.

① $n=1$일 때 0, 1
$n=2$일 때 **0**0, **0**1, **1**1, **1**0
② 곱집합 $\{0, 1\}^{n-1}$의 2^{n-1}개의 원소를 Gray Code 방식으로 나열하니 다음과 같았다고 하자.

$$v_1, v_2, \cdots, v_{2^{n-1}-1}, v_{2^{n-1}}$$

③ 그러면 곱집합 $\{0, 1\}^n$의 원소를 Gray Code 방식으로 나열하면 다음과 같다.

$$0v_1, 0v_2, \cdots, 0v_{2^{n-1}-1}, 0v_{2^{n-1}}, 1v_{2^{n-1}}, 1v_{2^{n-1}-1}, \cdots, 1v_2, 1v_1$$

즉, 곱집합 $\{0, 1\}^n$의 Gray Code 방식의 나열은 $\{0, 1\}^{n-1}$의 원소를 Gray Code 방식으로 나열한 원소의 처음에 0을 첨가한 것에, 처음에 1을 첨가한 것의 역순을 덧붙인다.

예를 들어 $\{0, 1\}^3$의 Gray Code 방식의 나열은 $\{0, 1\}^2$의 원소를 Gray Code 방식으로 나열한 원소 00, 01, 11, 10의 처음에 0을 첨가한

000, **0**01, **0**11, **0**10

과 처음에 1을 첨가한 것의 역순인

$$\mathbf{1}10, \mathbf{1}11, \mathbf{1}01, \mathbf{1}00$$

를 붙인 $\mathbf{0}00, \mathbf{0}01, \mathbf{0}11, \mathbf{0}10, \mathbf{1}10, \mathbf{1}11, \mathbf{1}01, \mathbf{1}00$ 이다.

$\{0, 1\}^n$의 Gray Code 방식의 나열에서 이웃한 두 원소는 오직 한 성분만 다르며 첫 원소와 마지막 원소도 한 성분만 다르다.

예제 2.3.17 곱집합 $\{0, 1\}^4$의 원소를 Gray Code 방식으로 나열하라. 또 이 나열을 이용하여 집합 $\{1, 2, 3, 4\}$의 모든 부분집합을 나열하여라.

풀이>> 곱집합 $\{0, 1\}^3$의 원소를 Gray Code 방식으로 나열하면

$$000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100$$

이다. 그러므로 위의 나열에 있는 원소의 처음에 0을 붙인

$$0000, 0001, 0011, 0010, 0110, 0111, 0101, 0100$$

과 원소의 처음에 1을 붙인 것의 역순인

$$1100, 1101, 1111, 1110, 1010, 1011, 1001, 1000$$

를 붙인

$$0000, 0001, 0011, 0010, 0110, 0111, 0101, 0100,$$
$$1100, 1101, 1111, 1110, 1010, 1011, 1001, 1000$$

이 곱집합 $\{0, 1\}^4$의 원소를 Gray Code 방식으로 나열한 것이다. 곱집합 $\{0, 1\}^4$의 원소 $x_1x_2x_3x_4$는 다음과 같이 $\{1, 2, 3, 4\}$의 부분집합 S에 대응된다.

$$S = \{i \mid x_i = 1, 1 \leq i \leq 4\}$$

이 대응을 이용하여 Gray Code 방식으로 나열한 $\{0, 1\}^4$의 원소를 $\{1, 2, 3, 4\}$의 부분집합으로 바꾸면

$$\phi, \{4\}, \{3, 4\}, \{3\}, \{2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 4\}, \{2\},$$

$$\{1, 2\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 4\}, \{1\}$$

과 같다. □

문제 2.3.17

곱집합 $\{0, 1\}^5$의 원소 중 첫수가 1인 원소를 Gray Code 방식으로 나열하여라. 또 나열된 원소를 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합으로 대응시켜 나열하여라.

곱집합 $\{0, 1\}^n$의 모든 원소를 Gray Code 방식으로 나열할 때 $\{0, 1\}^n$의 원소 $v=a_1a_2\cdots a_n$앞에 나열되는 원소의 개수인 $rank(v)$를 구하여 보자.

Gray Code 방식의 정의에 의하여

$$rank(a_1a_2\cdots a_n)=\begin{cases} rank(a_2a_3\cdots a_n) & (a_1=0) \\ 2^{n-1}+(2^{n-1}-1-rank(a_2a_3\cdots a_n)) & (a_1=1) \end{cases}$$

이다.

역으로 $0\le i\le 2^n-1$인 정수 i에 대하여 $rank(b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_0)=i$인 $b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_0$를 구하여 보자. i를 이진법으로 나타내어 $i=(a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_0)_{(2)}$라면

$$b_{n-1}=a_{n-1}$$

이고, $j=n-1, \cdots, 1$에 대하여

$$b_{j-1}=\begin{cases} a_{j-1} & (a_j=0) \\ 1-a_{j-1} & (a_j=1) \end{cases}$$

이다.

예제 2.3.18 곱집합 $\{0, 1\}^4$의 모든 원소를 Gray Code 방식으로 나열할 때 $rank(1010)$를 구하여라. 또 $rank(b_3b_2b_1b_0)=10$인 원소 $b_3b_2b_1b_0$을 구하여라.

풀이>> $rank(1010)=2^3+(2^3-1-rank(010))$,

$rank(010)=rank(10)$,

$rank(10)=2^1+(2^1-1-rank(0))=3$

이므로 $rank(1010)=2^3+(2^3-1-3)=12$이다.

한편 $rank(b_3b_2b_1b_0)=10=1010_{(2)}=(a_3a_2a_1a_0)_{(2)}$라 하면 $b_3=a_3=1$이고, $a_3=1$이므로 $b_2=1-a_2=1-0=1$이다. 또 $a_2=0$이므로 $b_1=a_1=1$이고, $a_1=1$이므로 $b_0=1-a_0=1$이다. 따라서 $b_3b_2b_1b_0=1111$이다. □

문제 2.3.18

곱집합 $\{0, 1\}^5$의 모든 원소를 Gray Code 방식으로 나열할 때 $rank(10101)$를 구하여라. 또 $rank(b_4b_3b_2b_1b_0)=15$인 원소 $b_4b_3b_2b_1b_0$을 구하여라.

예제 2.3.19

곱집합 $\{0, 1, 2\}\times\{0, 1\}\times\{0, 1\}$의 모든 원소를 나열할 때 이웃한 것은 오직 한 성분만 다르게 나열하라. (단, 첫 원소와 마지막 원소도 이웃한 것으로 본다.)

풀이>> ① 먼저 집합 $\{0, 1, 2\}$를 나열한다.

$$0, 1, 2$$

② $\{0, 1, 2\}$를 나열한 원소의 끝에 0을 첨가한 것과, 끝에 1을 첨가한 것의 역순을 덧붙여 곱집합 $\{0, 1, 2\}\times\{0, 1\}$의 원소를 나열한다.

$$00, 10, 20, 21, 11, 01$$

③ $\{0, 1, 2\}\times\{0, 1\}$을 나열한 원소의 끝에 0을 첨가한 것과, 끝에 1을 첨가한 것의 역순을 덧붙여 곱집합 $\{0, 1, 2\}\times\{0, 1\}\times\{0, 1\}$의 원소를 나열한다.

$$000, 100, 200, 210, 110, 010, 011, 111, 211, 201, 011, 001$$ □

문제 2.3.19

곱집합 $\{0, 1\}\times\{0, 1, 2\}\times\{0, 1\}$의 모든 원소를 나열할 때 이웃한 것은 오직 한 성분만 다르게 나열하여라. (단, 첫 원소와 마지막 원소도 이웃한 것으로 본다.)

MATHEMATICA

부록 B에서

Gray Code 방식

1 B-13은 곱집합 $\{0,1\}^n$의 원소를 Gray Code 방식으로 나열하는 알고리즘이다.

graycodelist[4]

를 입력하면 $\{0,1\}^4$의 모든 원소가 아래처럼 나열된다.

{0,0,0,0},{0,0,0,1},{0,0,1,1},{0,0,1,0},
{0,1,1,0},{0,1,1,1},{0,1,0,1},{0,1,0,0}
{1,1,0,0},{1,1,0,1},{1,1,1,1},{1,1,1,0},
{1,0,1,0},{1,0,1,1},{1,0,0,1},{1,0,0,0}

2 B-14는 Gray Code 방식에서 주어진 원소의 rank를 구하는 알고리즘이다.

grayrank[{1,0,1,0}]

을 입력하면 $\{0,1\}^4$의 원소를 Gray Code 방식으로 나열할 때 1010의 rank

12

가 출력된다.

3 B-15는 Gray Code 방식에서 rank를 알고 원소를 구하는 알고리즘이다.

ungrayrank[4,12]

를 입력하면 $\{0,1\}^4$의 원소를 Gray Code 방식으로 나열할 때 rank가 12인 원소

{1, 0, 1, 0}

이 출력된다.

연습문제 2.3

1 유클리드 알고리즘으로 3786과 145의 최대공약수를 구하여라.

2 두 자연수 a, b의 최대공약수를 (a, b)라 하자.

(1) $m > n$인 자연수에 대하여

$$(m, n) = (m-n, n)$$

임을 보여라.

(2) 위 (1)를 이용하여 3786과 145의 최대공약수를 구하여라.

3 n개의 바둑알로부터 A, B 두 사람이 A부터 시작하여 교대로 2개, 3개 또는 5개의 바둑알을 가져갈 때, 자기 차례에 바둑알을 가져갈 수 없는 사람이 지는 게임을 생각하여 보자. A가 이기는 전략이 있는 바둑알의 개수 n의 집합을 W라 하고 그렇지 않은 경우의 n의 집합을 L이라 할 때, 집합 W와 L을 구하는 알고리즘을 작성하여라.

4 아래 주어진 순서에서 순열 $\pi=316245$의 $rank$를 구하여라.

(1) 사전식순서

(2) J-T 순서

5 $n=6$일 때 아래 주어진 순서에서 $rank(\pi)=135$인 순열 π를 구하여라.

(1) 사전식순서

(2) J-T순서

6 1, 2, ⋯, 9에서 4개를 뽑는 조합을 아래에 주어진 순서로 나열할 때 2468의 $rank$를 구하여라.

(1) 사전식순서

(2) colex순서

7 1, 2, ⋯, 9에서 5개를 뽑는 조합에서 다음을 구하여라.

(1) $colexrank(v)=99$인 조합 v

(2) $lexrank(v)=99$인 조합 v

8 곱집합 $\{0, 1\}^7$의 모든 원소를 Gray Code 방식으로 나열할 때 다음을 구하여라.

(1) 원소 0101010의 $rank$

(2) $rank(v)=100$인 원소 v

9 곱집합 $\{0, 1\}\times\{0, 1, 2\}\times\{0, 1, 2\}$의 모든 원소를 나열할 때 이웃한 것은 오직 한 성분만 다르게 나열하여라. (단, 첫 원소와 마지막 원소도 이웃한 것으로 본다.)

10 다음 알고리즘에서 10번째 출력되는 값을 구하여라.

① $a\leftarrow 1$, a를 출력 ② $a\leftarrow a+3$ ③ $a\leq 100$이면 a를 출력하고 ②로 되돌아간다. $a>100$이면 멈춘다.

11 다음은 자연수 m을 b진법으로 나타내는 알고리즘이다.

> ① m을 b로 나눌 때 몫이 q, 나머지가 r이면 r을 출력한다.
> ② $q=0$이면 멈춘다.
> $q\neq 0$이면 $m\leftarrow q$하고 ①로 돌아간다.
>
> 이런 방법으로 출력된 숫자가 차례로 $r_0, r_1, \cdots, r_k$라면 $r_k r_{k-1}\cdots r_0$이 자연수 m을 b진법으로 나타낸 것이다. 즉, $m=(r_k r_{k-1}\cdots r_0)_{(b)}$이다.

위의 알고리즘을 이용하여 100을 3진법으로 나타내어라.

12 다음은 2 이상인 자연수 n의 소인수 중 최소를 찾는 알고리즘이다.

> ① 2가 n을 나누면 2를 출력하고 멈춘다.
> ② 2가 n을 나누지 못하면
> (i) $d\leftarrow 1$
> (ii) $d\leftarrow d+2$
> (iii) $d^2>n$이면 n을 출력하고 멈춘다.
> $d^2\leq n$일 때
> (a) d가 n을 나누면 d를 출력하고 멈춘다.
> (b) d가 n을 나누지 못하면 (ii)로 되돌아간다.

위의 알고리즘을 이용하여 187의 소인수 중 최소를 찾아라.

13 2진법으로 나타내어진 두 자연수

$$m=(a_k a_{k-1}\cdots a_1 a_0)_{(2)}, \quad n=(b_k b_{k-1}\cdots b_1 b_0)_{(2)}$$

의 합 $m+n$을 2진법으로 나타내는 알고리즘을 작성하여라.