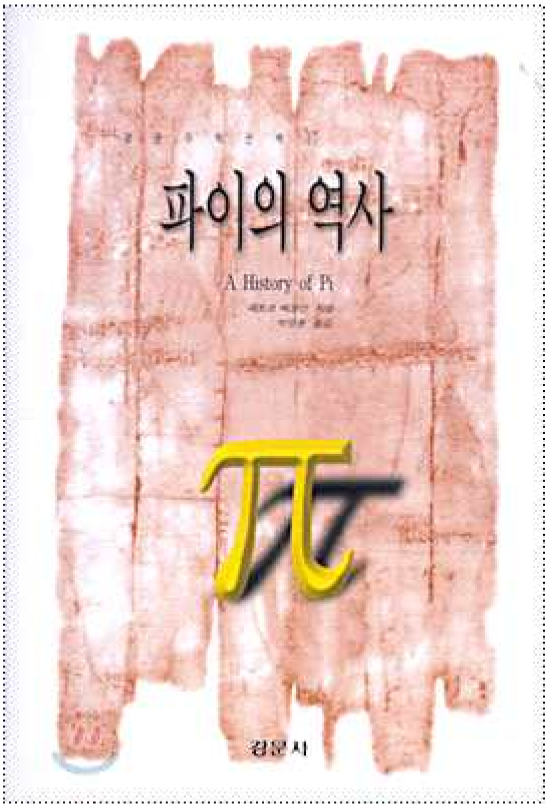
[도서]“파이의 역사” 페트르 베크만 저 / 박영훈 역 - 경문사
[도서]“오일러가 사랑한 수 e” 엘리 마오 저 / 허민 역 - 경문사



초월수[원주율(π)과 자연상수(e)]

원주률 $\pi(\approx 3\frac{1}{7}$, =3.141592654...)의 역사는 4000년 이상이지만,

자연상수 e(=2.718281828...)의 역사는 400년도 채 안된다.

1. 초월수 : 원주율(π)

① 왜 직각은 90도 인가?

- 원에서 1회전의 각도를 360도 사용하는 이유

1936년, 바빌론에서 3,200km 정도 떨어진 곳에서 서판이 발견되었다. 이것으로부터 수메르인들이 인류의 가장 위대한 발견인 글자를 처음으로 만들어 사용한 사람이라는 추측을 하게 되었다. 문자를 통하여 지식의 전달이 가능해졌고 미래로까지 그 지식이 전달될 수 있었던 것이다. 그들은 철필로 부드러운 진흙 서판에 설형 문자를 새겨 넣었다. 그리고 이 서판은 햇빛 아래에서 굳혀진 것이다. 수메르 문명은 세계에서 가장 오래된 문명으로 그들이 어디서 왔는지는 정확히 모르지만 대략 기원전 3500년경부터 수메르 지방에서 살기 시작하였다.

그 후, 기원전 2000년 쯤에 메소포타미아 북쪽의 아카드지방에 살던 셈족 계통의 아카드 사람들이 수메르 지방을 점령하고 바빌로니아를 세웠다. 바빌로니아(Babylonia)라는 이름은 수도

였던 바빌론(Babylon)에서 유래하였다. 바빌론에 대한 최초의 기록은 기원전 23세기경 아카드의 사르곤(Sargon) 왕의 지배에 대한 점토판에서 찾을 수 있다. 바빌로니아는 수메르인과 아카드인이 차례로 통치하였다. 경작이 용이하고, 상업적, 전략적으로 중요한 지형이어서 이민족의 침입을 많이 받았다.

바빌로니아에서는 기원전 3000년 후반부터 태음태양력(평년 12개월, 윤년 13개월)을 사용하였다. 기원전 529년부터 8년 3윤법(8태양년에 3윤달 적용)을 사용하였다가, 기원전 504년 이후에는 27년 10윤법을 사용하였으며, 기원전 383년부터 19년 7윤법(19태양년에 7윤달 적용)을 사용하였다. 이 마지막 역법은 헤브루(유대)력에 전승되어 현재까지 남아 있다.

기원전 6세기경이 되자 태음력을 기반으로 한 날짜가 잘 맞지 않는다는 것이 점차 알려졌다. 로마에서는 1년을 365일(정확히는 365.2422일)로 계산하는 태양력을 도입해야 할 필요성을 느끼게 된다. 그러나 문제는 지금껏 써왔던 달력을 폐기한다는 것에 대한 부담감이었다. 날짜가 틀려서 고치기는 해야겠는데 전통을 버리는 것이 쉽지는 않았던 모양이다.

그래서 양력과 음력을 혼합하여 사용하였다. 로마에서는 4년 중 첫해는 평년으로 355일, 둘째 해는 윤년으로 378일, 셋째 해는 다시 평년으로 돌아가서 355일, 넷째 해는 윤년으로 377일을 적용하는 괴이한 달력을 채택하였다. 기본적으로 예전에 쓰던 태음력 기반의 날짜 체계를 지키면서도 평년과 윤년의 조합을 통해 4년 단위로는 비교적 정확한(4년을 모으면 1,465일이 되니 다시 4로 나누면 366.25일이 된다) 날짜 체계로 갈 수 있다고 생각한 것이다.

기하학은 물체의 형상 대소·위치 등 공간에 관한 학문으로, 본래는 이집트 나일강의 범람 후 땅을 측량하게 된 데서 유래하여 「땅(geo)을 측량한다(metry)」는 의미를 가진다.

희랍(고대 그리스)시대에 들어서면서 기하학자들은 원의 1회전에 대한 값을 정의할 필요가 생겼고, 당시 대양력 1년 365일을 기준으로 하여 원의 1회전의 값을 정한 것이다. 365는 홀수이므로 나누어지지 않기 때문에 가장 근사하는 360도를 1회전의 각도로 정의하였고 360/4=90으로부터 직각이 90도가 된 것이다.

이후, 기하학은 고대 그리스의 피타고라스(Pythagoras)·아르키메데스(Archimedes) 등에 의해 이론적 기하학으로 발전했으며, 유클리드(Euclid)에 의한 「기학학 원리」에서 고전적 기하학의 체계가 완성되었다. 유클리드는 그의 기하학 원론(Element, 기원전 280년경)에서 당시까지 알려진 “자와 컴파스”로 불리우는 모든 기하학을 공리체계로 모아서 집대성하였다.

피타고라스 [Pythagoras, BC582 ~ BC497] 그리스의 종교가·철학자·수학자. 피타고라스는 만물의 근원을 ‘수(數)’로 보았으며, 수학에 기여한 공적이 매우 커 플라톤, 유클리드를 거쳐 근대에까지 영향을 미쳤다. 오늘날 피타고라스의 정리의 증명법은 유클리드에 유래한 것이며, 피타고라스정리에 대한 그의 증명법은 알려져 있지 않다.

유클리드 [Euclid BC 330 ~ BC 275] BC 300년경에 활약한 그리스의 수학자. 그리스 기하학, 즉 '유클리드 기하학'의 대성자이다. 5개의 전제공리로부터 465개의 공리를 유도하였다. 그의 저서 《기하학원본》은 기하학에 있어서의 경전적 지위(經典的地位)를 확보함으로써 유클리드라 하면 기하학과 동의어로 통용되는 정도에 이르고 있다. "수학에는 왕도가 없다"라는 명언을 남겼다.

② 원주율 π의 정의 및 값의 유도

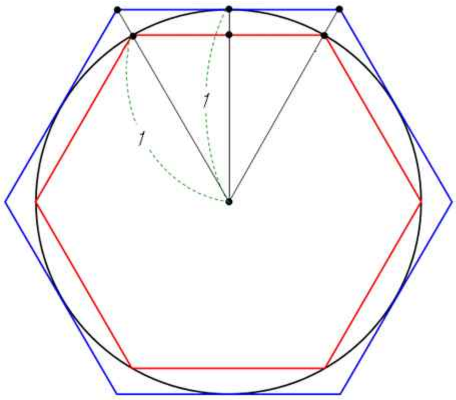
정의 : 원의 지름과 원주(원둘레의 길이)의 비를 나타내는 것으로, 지름이 1인 원에서 원둘레 길이의 값이 된다.

[원의 반지름이 r인 경우, 원주의 길이는 $2\pi r$이 된다.]

수학적 과정(알고리즘)을 통해 원주율(π)의 값을 원하는 만큼 정확하게 구할 수 있는 방법을 처음으로 제시한 사람은 그리스의 수학자인 아르키메데스(Archimedes:기원전 287-212)였다.

아르키메데스[Archimedes, BC 287-212] 고대 그리스의 수학자 ·물리학자. '아르키메데스의 원리', "구에 외접하는 원기둥의 부피는 그 구 부피의 1.5배이다"라는 정리를 발견하였다. 지렛대의 반비례법칙을 발견하여 기술적으로 응용하였으며, 그 외의 업적으로 그리스 수학을 더욱 진전시켰다.

그는 원에 내접하는 정다각형과 외접하는 정다각형을 그리면, 원주(원둘레)의 길이는 이 내접다각형의 주의 길이와 외접다각형의 주의 길이 사이에 있다는 사실을 이용하여 원주의 길이를 구하고, 이로부터 원주율의 값을 계산할 수 있다고 생각하였다.



원에 내접하는 정다각형의 길이 < 원주의 길이 < 원에 외접하는 정다각형의 길이

빨강색의 길이 < 검정색의 길이 < 파랑색의 길이

이 방법으로 우선 원에 내접, 외접하는 정육각형을 만들고, 다음에 변의 수를 두 배씩 늘여 즉, 원에 내접, 외접하는 정십이각형, 정이십사각형, 정사십팔각형, 정구십육각형을 만들어서 원주율 π는 $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ 즉, $3.1408\cdots < \pi < 3.1428\cdots$ 의 값을 가진다는 것을 증명하였다.

아르키메데스의 시대에서 1800년이 지난 뒤, 비에트(1540-1603)라는 프랑스 수학자는 삼각법을 연구하는 과정에서 원주율(π)와 관련하여 다음과 같은 수식을 발견하였다.

프랑수아 비에트 [François Vièe, 1540 ~ 1603] : 프랑스의 수학자. 1591년부터 간행하기 시작한 《해석학입문》에서 새로운 대수학을 전개하였으며, 17세기 해석기하학 전개의 기초를 확립하는 데 공헌하였다.

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\cdots$$

1593년에 발표된 이 ‘무한 곱’의 표기법은 수학사에 획기적인 사건이 되었다. 수식의 마지막에 찍은 점 3개는 한없이 계속되고 있음을 표현해 준다. 즉, 점 3개를 이용해 무한 과정을 표현한 최초의 수학공식이었기 때문이다.

17세기에 들어와서 뉴턴과 라이프니츠에 의하여 미분적분학이 체계화되는 과정에서 원주율(π)는 무한급수를 이용하여 계산을 수행하게 되는데, 1671년 스코틀랜드 수학자 그레고리(1638-1675)는 다음과 같은 무한급수의 수식을 제시하였다.

$$\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots\cdots$$

이 공식의 놀라운 점은 정수만으로 π의 값을 표현할 수 있음을 보여주었다는 사실이다. 그 후 샤프(1651-1742), 오일러, 마틴(1685-1751), 라니(1660-1734)등이 무한급수를 이용하여 원주율 값을 계산하였다.

그레고리 [James Gregory, 1638 ~ 1675] 영국(스코틀랜드)의 수학자・발명가. 반사(反射) 망원경을 발명하고 이를 그의 저서 《Optica promota(1963)》에 수록했다. 기하학적 도형(圖形)의 면적 측정(面積測定)에 관한 독자(獨自)의 방법을 발명하여 하위헌스와 논쟁하고 또 망원경에 관하여 뉴턴과 쉴새없이 서신을 교환했다.

아이작 뉴턴 [Isaac Newton 1642.12. ~ 1727.3.] 영국의 물리학자·천문학자·수학자·근대 이론과학의 선구자. 수학에서는 미적분법을 창시하고, 물리학에서는 뉴턴역학의 체계를 확립했다. 또한 이것에 표시한 수학적 방법 등은 자연과학의 모범이 되었으며 사상면에서도 역학적 자연관은 후세에 많은 영향을 끼쳤다.

고트프리트 라이프니츠 [Gottfried Wilhelm Freiherr von Leib´niz , 1646 ~ 1716] 독일의 철학자 ·수학자 ·자연과학자 ·법학자 ·신학자 ·언어학자 ·역사가. 수학에서는 미적분법의 창시로, 미분 기호, 적분 기호의 창안 등 해석학 발달에 많은 공헌을 하였다. 역학(力學)에서는 '활력'의 개념을 도입하였으며, 위상(位相) 해석의 창시도 두드러진 업적의 하나이다.

③ 원주율(π)는 왜 초월수인가 ?

가장 간단하게 원의 정의를 살펴보자. 원의 정의는 "주어진 한 점에서 동일한 거리에 떨어져 있는 무한히 많은 점들의 집합"이다. 원을 구성하는 점을 1,000개로 정하고 계산한 원주율의 값과, 점을 10,000개로 정하고 계산한 원주율의 값과 점을 100,000개로 정하고 계산한 원주율의 값에는 정확도에 분명한 차이가 있다. 무한히 많은 점들을 가지고 원주율을 계산하여야 하여야 정확한 값을 얻을 수 있는데, 무한대의 점을 이용하여 원주율을 계산할 수는 없기 때문이다.

결과적으로 인간은 곡선의 길이를 정확하게 계산할 능력이 없다. 단지 근사값만을 계산할 수 있을 뿐이다.

2. 초월수 [자연상수 e]

자연상수 e는 원주율 π, 허수 j 와 함께 매우 중요한 상수 중의 하나이다. 자연상수 e는 원주율 π와 같이 원둘레의 길이, 원의 넓이 등과 같은 단순한 계산에 사용되는 상수가 아니며, 물리적인 현상의 해석이나 수식의 전개를 쉽게 하기 위해 사용되는 상수이다.

수학적으로는 푸리에변환이나 라플라스변환의 정의에서, 물리적인 현상으로는 지수적인 수치의 감소변화를 변화를 기술하는 법칙의 경우 즉, 자연상수에 대한 지수승으로 표현하는 지수함수 $y=e^x$의 형태로 사용되며, 그리고 회전이나 진동과 관련된 분야에 이용되는 오일러 항등식 $e^{j\theta}=\cos\theta+jsin\theta$의 형태로 사용된다.

17세기(1600-1699년)는 '수학의 황금시대'라 불리운다. 로그의 발견, 수학의 기호화, 좌표평면과 좌표공간의 발견, 해석기하학 도입, 수학적 확률론이 정착되었으며, 17세기 말에 가서는 미분적분학이 발견되어 현대 수학의 확고한 기틀이 마련되었다. 바로 이 시기에 자연상수 e가 등장했다. 이 수는 초등학교 수학에서는 찾아볼 수가 없다. 이 수는 로그함수, 지수함수, 극한, 무한급수와 어울리면서 고등학교 수학 II과정에 처음으로 등장한다. 현대수학의 각 분야는 이 수를 절대적으로 요구했고, 자연상수 e는 현대수학의 중추적인 역할을 하고 있다.

자연상수 e는 자연로그의 밑이 되는 수이다. 이 수의 값은 2.718281828.... 이다. 로그 계산법을 도입한 스코틀랜드 수학자 존 네이피어의 이름을 따 네이피어 상수 혹은 스위스 수학자 레온하르트 오일러의 이름을 따 오일러의 수라고도 불리지만, 보통은 알파벳의 영어발음을 따서 e라고 한다. 숫자 2와 알파벳 e의 발음이 똑같은 한국어 사용자들은 분간을 위해 자연상수 (자연로그의 밑이 되므로) 라고 부르기도 한다.

역사적으로 볼 때, 자연상수 e는 복리계산 공식과 관련하여 처음으로 등장한다. 다음으로 자연로그의 밑(=$\ln_e$)에 등장 하며, 쌍곡선 함수 $y=\dfrac{1}{x}$에 대한 구적(넓이 계산) 문제에 등장한다. 그리고 마지막으로 18세기 전반 지수함수의 미적분학에 등장하여 중추적인 역할을 수행하게 된다.

① 복리계산의 e

아주 먼 옛날부터 돈은 사람들의 핵심적인 관심사였다. 현재까지 보존된 고대의 수학 문헌 중 많은 것이 이자와 관련된 문제를 다루고 있다. 기원전 1700년경으로 추정되는 메소포타미아에서 출토된 점토판에는 다음과 같은 문제가 있다.

" 연이율 20%에 1년마다의 복리로 계산할 때, 원리합계가 원금의 두 배가 되려면 얼마나 걸리겠는가? "

자연증가에 따른 복리법을 다른 말로 연속복리라고 한다. 말 그대로 시시각각 이자가 붙는 상황을 말하는데, 단리계산 방법과 복리계산 방법을 정리하면 다음과 같다.

► 먼저 단리계산 방법을 이용하여 이자율을 계산하면 다음과 같다.
은행에 100원($a=100$)을 입금하면 1년에 10%(이자율;$r=0.1$)씩 이자를 준다고 생각하자.
1년 후, 원금 a원에 이자 10%(ar=10) $a+ar=a(1+r)$
2년 후, 원금 a원에 이자 10%(ar=10) $a+ar+ar=a(1+2r)$
3년 후, 원금 a원에 이자 10%(ar=10) $a+ar+ar+ar=a(1+3r)$
....
10년 후 원금 a원에 이자 10%(ar=10) $a+ar+ar+ar+...+ar=a(1+10r)$

결과적으로 10년이 지나면 원금 100원과 이자 10원/년*10년=100원으로 원금의 2배가 된다.
$a(1+10r)=100(1+10*0.1)=200$ $r=0.1$일 때

► 동일한 조건에 대하여 복리계산 방법을 이용하여 이자율을 계산하면 다음과 같다.
은행에 100원($a=100$)을 입금하면 1년에 10%(이자율;$r=0.1$)씩 이자를 받는다고 하자. 즉, 1년 후에 이자 10%(10원)을 받고 2년이 지나면 원금에 이자가 더해진 110원의 이자 10%(11원)을 받는 것이다. 그러므로
1년 후, 원금 a에 이자 ar이 되므로 $a+ar=a(1+r)$
2년 후, 원금 a(1+r)에 이자를 합하면 $a(1+r)+\{a(1+r)\}r=a(1+r)(1+r)=a(1+r)^2$
3년 후, 같은 방법을 적용하면 $a(1+r)^2+\{a(1+r)^2\}r=a(1+r)^2(1+r)=a(1+r)^3$
.....
같은 방법으로 10년 후 총 돈은 $a(1+r)^{10}$ 이 된다.
그러므로 10년 후 총 돈은 $100(1+0.1)^{10}$=259,3742원 이 된다.

► 이자율의 적용기간을 1년, 6개월, 1일 단위로 변경해서 계산해 보면
1년에 이자 10%를 1 번으로 10년을 계산하면 (1년마다)
$a(1+r)^n$=$100(1+0.1)^{10}$=$100(1+0.1/1)^{10*1}$ = 2.593742*a
1년에 이자 10%를 2번으로 10년을 계산하면 (6개월마다)
$a(1+r)^n$=$100(1+0.1)^{10}$=$100(1+0.1/1)^{10*1}$ = 2.653298*a
1년에 이자 10%를 365번으로 10년을 계산하면 (1일마다)
$a(1+r)^n$=$100(1+0.1)^{10}$=$100(1+0.1/365)^{10*365}$ = 2.71791*a
1년에 이자 10%를 (365*24)번으로 10년을 계산하면 (1시간마다)
$a(1+r)^n$=$100(1+0.1)^{10}$=$100\{1+0.1/(365*24)\}^{10*(365*24)}$ = 2.71826*a

즉, 단리계산에서 원금을 a라 하고 이자를 a/n 으로 계산하면 원금의 2배가 되려면 n배의 기간이 지나야 한다. 하지만, 이자율 적용기간을 단계적으로 줄여가면서 복리로 계산하면 원금의 약 2.72배가 된다. 여러 가지 n의 값에 대하여 복리계산의 합계 금액을 정리하면 다음과 같다.

n	$(1+1/n)^n$
1	2
2	2.25
3	2.37037
4	2.44141
5	2.48832
10	2.59374
100	2.70841
1000	2.71692
10000	2.71815
100000	2.71827
1000000	2.71828

복리계산과 관계된 식에서 이자율을 작게하는 즉, n의 값을 무한대로 증가시키는 경우에 대한 수식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$S = \lim_{n \to \infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

위의 일반식 S은 값이 부정형이 되는데 부정형이라는 말을 이해하기 위하여 다음 수식을 고려해 보자.

$$\lim_{n \to \infty}\frac{1}{n} = 0$$

여기서 $n \to \infty$일 때, $1/n$의 극한이 0의 값으로 진행한다는 것을 의미한다. 극한 $1/n$의 값이 0이 된다는 것을 의미하는 것은 아니다. 수학에서 가장 일반적으로 접하게 되는 부정형으로 $0/0$, ∞/∞, $0 * \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ 그리고 $\lim_{n \to 0}(1+1/n)^n$ 등이 있다. 모든 부정형의 식은 수치적으로 크게 만들려고 하는 양과 작게 만들려고 하는 양들 사이의 “싸움”을 의미한다.

$(a+b)^n$에서 n의 값이 무한히 커지는 경우에 대하여 무한급수형태로 정리하면 다음과 같으며, 이것을 이항정리라 한다.

$$(a+b)^n = a^n + n*\frac{a^{n-1}*b}{1!} + n(n-1)*\frac{a^{n-2}*b^2}{2!} + n(n-1)(n-2)*\frac{a^{n-3}*b^3}{3!} + \ldots$$
$$(a+b)^n = a^n + {}_nC_1 a^{n-1}b + {}_nC_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_k a^{n-k}b^k + \cdots + b^n$$

여기서, ${}_nC_k a^{n-k}b^k$을 일반항, 계수의 열 $1(={}_nC_0), {}_nC_1, {}_nC_2, \ldots, {}_nC_k, \ldots, {}_nC_{n-1}, 1(={}_nC_n)$을 이항계수라고 한다.

복리계산 일반항 S를 이항정리(Binominal theorem)식에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$S = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

이항정리 식에 $a=1$, $b=\frac{1}{n}$을 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$(1+1/n)^n = 1^n + n*\frac{1^{n-1}*1/n}{1!} + n(n-1)\frac{1^{n-2}*(1/n)^2}{2!} + n(n-1)(n-2)\frac{1^{n-3}*(1/n)^3}{3!} + \ldots$$
$$(1+1/n)^n = 1+1+\frac{1}{2!}(\frac{n-1}{n}) + \frac{1}{3!}(\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}) + \ldots$$

여기서 n이 무한히 크면

$$n \approx n-1 \approx n-2 \approx n-3 \approx n-4$$

이므로 $(1+\frac{1}{n})^n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots$

이 된다.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots.$$

무한급수 식은 부호가 일정하기 때문에 항이 더해질수록 극한값에 더 빠르게 가까워진다. 원하는 만큼의 정확한 값은 이 급수의 항을 더 많이 더해서 얻을 수 있다.

복리계산과 관련된 일반식 S는 이후 관심에서 멀어지게 되는데 이 수식은 이후 자연로그의 밑 e로 하는 수식 $\ln_e x$에 나타나고, 미분해도 자기 자신이 되는 지수함수 $y=e^x$에서 나타난다.

② 자연로그 밑의 e

▶ 삼각함수로 곱셈을 쉽게 하기

덧셈이나, 뺄셈 등의 연산은 비교적 계산이 쉬운 편에 속한다. 하지만 두 수를 곱하거나 나누는 것은 생각보다 계산이 많이 필요한데, 옛날 사람들은 어떻게 계산한 것일까? 단순하게 그냥 곱했을까? 16세기 후반에 삼각함수를 이용한 방법이 이용되었다. 이러한 방법은 비티히

(Paul Wittich, 1546-1586)와 클라비우스(Christopher Clavius, 1538-1612)가 개발한 방법으로 삼각함수의 덧셈 정리를 이용하여 계산을 수행하며, 계산방법은 다음과 같다.

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$
$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

두 식을 더한 후 정리하면 다음과 같다.

$$\cos A^*\cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$

예) a=57.36과 b=292.4를 곱을 구하라.

값을 구하는 것은 0.5736, 0.2924를 곱한 뒤, 100,000을 곱해주면 된다. 따라서 1보다 작은 두 수의 곱만 알면 족하다. 편의상 양수만 생각하기로 하는데, 1보다 작은 수는 항상 어떤 수의 코사인 값이다. 실제로 삼각함수표를 뒤적여보면 다음과 같다.

$$0.5736 = \cos 55^0, \qquad 0.2944 = \cos 73^0$$

위의 식에 대입하여 정리하면

$$0.5736^*0.2924 = 1/2(\cos 128^0 + \cos 18^0)$$

삼각함수표를 적용하면

$$0.5736^*0.2924 = 1/2(0.9511 - 0.6157) = 0.1677$$

최종 결과값은

$$0.1677^*100,000 = 16,770$$

이 된다.

오늘날처럼 휴대용 계산기가 없던 시절에 십진 기수법이나 소수점 표기법마저도 정착되지 않았던 시절에, 매우 큰 수를 서로 곱한다는 것은 악몽이었다는 것을 기억할 필요가 있다. 천문학과 관련된 숫자를 계산할 필요가 있는 천문학자들에게는 이런 계산방법이 일상다반사였기 때문에 매우 정밀한 삼각함수 표는 필수였다

▶ 로그의 등장

16세기와 17세기 초반기에는 모든 분야에서 과학적 지식이 엄청나게 팽창했다. 지리학, 물

리학, 천문학은 고대의 독단에서 벗어나기 시작했고, 우주에 대한 인식을 빠르게 변화시켰다. 독일에서 케플러가 행성의 운동에 관한 세 가지 법칙(1609, 1619년)을 공식화함으로써 천문학은 지구중심 우주론으로부터 완전히 벗어나게 되었다. 이러한 발전은 수치적인 자료의 양을 엄청나게 증가시켰고, 과학자들은 지루한 수치계산에 많은 시간을 허비하도록 만들었다. 이러한 수치계산의 부담으로부터 과학자들을 완전히 그리고 영원히 해방시킬 수 있는 계산방법이 요구된 상황이었으며, 여기에 네이피어가 도전을 시도하였다.

네이피어는 로그에 대한 이론을 연구하여 두 수의 곱이나 몫의 근삿값을 작은 수의 합이나 차로 바꾸어 계산하여 구할 수 있다는 것을 발견하였다. 그리고 1619년「놀라운 로그 법칙의 기술(Mirifici Logarithmorum Canonis Descript)」이라는 그의 저서에서 처음으로 로그의 계산법에 관해 설명하였다. 또 그가 죽은 지 2년 후에 나온 「놀라운 로그 법칙의 집대성」에는 로그표의 계산법이 실려 있다.
로그는 전 유럽의 과학자와 멀리 중국의 과학자들이 신속하게 받아들였다. 로그를 가장 먼저 이용한 사람 중에는 천문학자 케플러가 있다. 그는 이를 이용해서 행성의 궤도를 정교하게 계산하는데 성공을 거두었다.

당시 브리그스(1561-1631)는 런던에 있는 그레셤 대학의 기하학 교수이었는데 네이피어의 로그에 대하여 두 가지 수정사항을 제시하였다. 하나는 10^7이 아니라 1의 로그값을 0으로 정하고, 다른 하나는 10의 로그값을 10의 적당한 제곱이 되도록 로그를 수정하는 것이었다. 그리고 마침내 $\log 10 = 1 = 10^0$으로 결정하였다.

양수 N을 $N = 10^L$으로 나타낼 때, L을 N의 브리그스 로그 또는 '상용'로그라고 한다는 말과 같다. 이것을 기호로 $\log_{10} N$ 나타낸다. 이렇게 해서 '밑'의 개념이 탄생했다. 이 결과는 브리그스가 수행하였으며, 1624년 로그산술이라는 제목으로 발표되었다.

네이피어 로그는 $1 - 10^{-7}$의 값이 1보다 작기 때문에 네이피어 로그는 수가 증가함에 따라 감소하는 반면에 이후 작성된 밑이 10인 사용로그는 그 값이 증가하는 형태가 된다.

케플러 법칙 [Kepler's laws] : 독일의 천문학자 요하네스 케플러(1571~1630)에 의해 유도된 행성의 운동에 관한 법칙. 케플러는 16세기 네덜란드의 천문학자였던 T. 브라헤의 관측 자료를 분석하여 1609년에는 제1법칙 · 제2법칙(면적속도 일정의 법칙)을 발표했고, 제3법칙은 약 10년이 지난 1619년에 발표했다. 케플러 제1법칙은 모든 행성은 태양을 하나의 초점으로 하는 타원 궤도를 그리며 태양 주위를 공전한다. 제2법칙은 한 행성과 태양을 연결하는 동경 벡터는 동일한 시간 간격 동안 같은 면적을 휩쓸고 지나간다. 제3법칙은 행성의 항성주기(공전주기)의 제곱은 그 행성으로부터 태양까지의 평균거리의 세제곱에 정비례한다. 이 법칙들 가운데 특히 제2법칙은 1684~1685년 I. 뉴턴이 지구와 달 사이, 그리고

태양과 행성 사이의 중력 법칙들을 계산할 때 결정적으로 중요한 역할을 했다.

존 네이피어 [John Napier, 1550 ~ 1617.4] 영국의 수학자. 수학 ·신학 ·점성술 등을 좋아하였는데, 특히 신학에서는 열렬한 신교도로서 로마교황과 그 권위에 반대하여 《성 요한 묵시록 전체에서의 소박한 발견 A Plain Discovery of the Whole Revelation of Saint John》(1594)을 발표하였다. 또 점성술에서는 예언에 관한 저술을 하는 등 그 재능을 보였다. 특히 40여 년에 걸친 수학 연구로 산술 ·대수(代數) ·삼각법 등의 단순화 ·계열화를 꾀하였으며, 연구영역이 '네이피어 로드' 등 계산기계의 고안에까지 미쳤다. 그 중 계산의 간편화를 목적으로 한 로그의 발명은 수학사상 커다란 업적이었다. 즉, 1614년 《경이적인 로그법칙의 기술 Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio》로 로그의 성질을 명백히 하였으며, 1616년에는 H.브리그스와 협력하여 10을 밑[底]으로 하는 상용로그표를 만들기 시작했으나 완성시키기 전에 죽어 《경이적인 로그법칙의 구조》(1619)가 유고로서 출판되었고, 그 일은 브리그스에게 인계되었다. 그는 로그를 등차수열적 운동과 등비수열적 운동을 대응시켜서 발견해 냈다. 또한, 소수기호(小數記號)의 도입자로서도 알려졌다.

▶ 로그의 이론

로그는 기하급수적인 변화를 산술급수적인 변화로 바꾸어 이해하려는 시도 즉, 곱셈과 나눗셈을 덧셈과 뺄셈 등으로 바꾸어 좀 더 쉽게 계산하고자 하는 의도에서 출발하였다.

등차수열은 이웃한 항과의 차가 일정한 수열(어떤 규칙에 따라 차례로 나열된 수)을 나타내며, 이때의 일정한 차이를 공차라 한다. 등비수열은 이웃한 항과의 비가 일정한 수열을 나타낸다. 이때 일정한 비를 '공비([common ratio, 公比, 어떤 항과 그 앞의 항에 대한 비)'라고 한다. 먼저 다음과 같은 2^n의 거듭제곱의 관계를 살펴보자.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	..
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	..

n의 값은 등차수열을 이루고 있으며, 그에 대응되는 2^n의 값은 등비수열의 값을 이루고 있다. 이러한 등차수열과 등비수열 사이에는 다음과 같이 등차수열에서의 합과 차는 해당되는 등비수열의 두 항의 곱과 몫에 각각 대응된다.

$6+7=13$ $\quad$ $13-7=6$

$64*128=8192$ $\quad$ $8192/128=64$

그리고 등차수열의 항에서의 곱과 몫은 다음과 같이 해당되는 등비수열의 거듭제곱 및 거듭

제곱근의 대응관계가 성립한다.

$2*3=6$ $\qquad$ $12/3=4$

$4^3=64$ $\qquad$ $\sqrt[3]{4096}=16$

따라서 등비수열의 두 항을 곱하거나 나누려면 등차수열의 대응되는 항의 합이나 차를 구하여 그와 대응되는 등비수열의 항을 찾아주면 된다. 따라서 이러한 등차수열과 등비수열의 관계를 이용하면 큰 수의 계산을 단순화할 수 있게 된다. 이러한 성질이 로가리즘(logarithm)의 이론적 배경이 된다.

첫항이 1 그리고 공비가 q인 등비수열은 다음과 같이 표현된다.

1, q, q^2, q^3, …

등비수열을 양방향으로 한없이 확장하면 다음과 같은 형태가 된다.

$$\ldots,\ q^{-3},\ q^{-2},\ q^{-1},\ q^0=1,\ q^1,\ q^2,\ q^3,\ \ldots$$

각 항의 공비는 q가 되는데, 지수가 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …와 같이 등차수열을 이루는 것을 알 수 있다. 다음으로 등비수열의 임의의 두 항에 대한 곱은 다음과 같이 그에 대응하는 지수들의 합을 지수로 한 값과 같다.

$$q^2 \star q^3 = (q*q)*(q*q*q) = q^{(2+3)} = q^5$$
$$q^2 \star q^{-3} = (q*q)*1/(q*q*q) = q^{(2-3)} = q^{-1}$$

만약 임의의 양수를 어떤 고정된 수의 거듭제곱으로 표현할 수 있다면, " 수들의 곱셈과 나눗셈은 그 수들의 지수의 덧셈과 뺄셈으로 계산이 가능해 진다"는 것을 의미한다.

▶ 네이피어 로그

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	..
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	..

등비수열을 이루는 2에 대한 거듭제곱의 값들을 살펴보면 값 사이에 숫자 간격이 너무 커서 사이에 없는 숫자는 곱셈은 불가능하다. 즉, 2^n의 값이 없는 $10*50$과 같은 식은 계산이 불가하다는 것이다.

네이피어는 등비수열을 이루는 값의 차이를 줄여야 의미가 있을 것이라 생각했다. 그리하여 초항을 크게 하고 등비를 줄이기 위한 방법을 고안하였다. 공비는 1에는 가깝지만 너무 가깝지 않은 수가 합리적인 선택일 것이다. 네이피어는 1에는 가깝지만 너무 가깝지 않은 수를 합리적으로 선택하기 위하여 고심하였으며 이러한 과정을 통해 선택한 수는 0.9999999 즉,

$1-10^{-7}$이었다. 다음으로 초항의 값으로 네이피어는 10^7의 값을 선택하였다. 이것은 소수점 이하 일곱 자리의 근사값을 사용하는 대신 정수를 사용하기 위하여 선택한 것이다. 또한, 당시 삼각법 계산과 관련된 엄청난 작업을 줄이는 것이 목적이었기 때문에 당시 삼각법에서 단위 원의 반지름을 $10,000,000$ 즉, 10^7 으로 나누는 관례에 따른 것이다. 단위 1에서 10^{-7}을 빼면, 이 체계에서 1에 가장 가까운 수 $1-10^{-7}=0.9999999$를 얻게 된다. 바로 이것이 네이피어가 자신의 표를 구성하는데 사용한 공비이다. 이 공비의 값을 이용하여 네이피어는 다음과 같이 소수이하 7자리까지에 대하여 계산을 수행하였다.

$$10^7(1-10^{-7})^0 = 10,000,000$$
$$10^7(1-10^{-7})^1 = 9,999,999$$
$$10^7(1-10^{-7})^2 = 9,999,998$$
$$\cdots$$
$$10^7(1-10^{-7})^{100} = 9,999,900$$

다음으로 $(1-10^{-7})^{100} = 0.9999900$, $(1-10^{-5}) = 0.99999$ 의 값을 새로운 비로 선택하여

$$10^7(1-10^{-5})^1 = 9,999,900$$
$$10^7(1-10^{-5})^2 = 9,999,800$$
$$\cdots$$
$$10^7(1-10^{-5})^{20} = 9,998,000.19$$
$$\cdots$$
$$10^7(1-10^{-5})^{50} = 9,995,001$$

네이피어는 반복적인 뺄셈으로 $(1-10^{-7})^L$에 대하여 L의 값이 1에서 100까지인 경우에 대하여 계산을 수행하였다. $L=100$인 경우, $(1-10^{-7})^{100}=1-10^{-5}$ 식이 성립한다. 다음으로 $(1-10^{-5})^L$의 경우에 대하여 L의 값이 1에서 50까지 모든 경우에 대한 값을 20여년에 걸쳐 계산을 수행하였다.

네이피어는 자신의 창조물에 처음에는 “인공 수(artificial number)”라는 용어를 사용하였다가 후에, 그리이스어의 번역어인 로가리즘(logarithm)"라는 이름을 사용하기로 결정했는데 이는 ‘ratio'와 'number'의 합성어로서 “비를 계산하는 수”라는 뜻이 된다.

현대적 표현법을 적용하면 주어진 수 N이

$$N = 10^7(1-10^{-7})^L$$

의 식으로 표현될 때, 지수 L을 N의 네이피어 로그라고 한다. 네이피어로그의 값을 소수이하 7자리까지만 계산하여 정리하면 다음과 같다.

n	$(1-10^{-7})^n$	$10^7(1-10^{-7})^n$
0	1	10,000,000.
1	0.9999999	99,999,999.
2	0.9999998	99,999,998.
3	0.9999997	99,999,997.
4	0.9999996	99,999,996.
5	0.9999995	99,999,995.
6	0.9999994	99,999,994.
7	0.9999993	99,999,993.
8	0.9999992	99,999,992.
9	0.9999991	99,999,991.
10	0.9999990	99,999,990.
100	0.9999900	99,999,000.

n	$(1-10^{-5})^n$	$10^7(1-10^{-5})^n$
0	1	10,000,000.
1	0.9999900	99,999,900.
2	0.9999800	99,999,800.
3	0.9999700	99,999,700.
4	0.9999600	99,999,600.
5	0.9999500	99,999,500.
6	0.9999400	99,999,400.
7	0.9999300	99,999,300.
8	0.9999200	99,999,200.
9	0.9999100	99,999,100.
10	0.9999000	99,999,000.
50	0.9995000	99,950,000.

n의 값은 등차수열을 이루고 있으며, 그에 대응되는 $(1-10^{-7})^n$의 값은 등비수열의 값을 이루고 있으므로 다음과 같은 계산이 가능해 진다.

$2+5=7$
0.9999998 * 0.9999995 = 0.9999993

$9-3=6$
0.9999991 / 0.9999997 = 0.9999994

주어진 식 $N=10^7(1-10^{-7})^L$에대한 로그표기법을 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{N}{10^7}=(1-10^{-7})^L$$

이므로,

$$NapLog_{(1-10^{-7})}(\frac{N}{10^7}) = L$$

그러므로 $N=10^7$인 경우, $NapLog_{(1-10^{-7})}(\frac{10^7}{10^7})=0$ 이므로

$$NapLog(10^7) \ = \ 0$$

이 된다. 네이피어 로그식은 자연상수 e를 적용하면

$$L=\log_{(1-10^{-7})}(\frac{N}{10^7}) \approx 10^7 \log_{\frac{1}{e}}(\frac{N}{10^7})$$

이 된다. 여기서, $(1-10^{-7})^{10^7} \approx \frac{1}{e}$를 나타낸다.

네이피어에 의한 로가리즘의 발견은 빠르고 널리 알려졌으며 극찬을 받았다. 이후, 케플러 등 당대의 수학자들이 이 개념을 확산시키는데 크게 공헌하였다.

▶ 상용로그[common logarithm]의 등장

네이피어의 발견은 커다란 찬양을 받았다. 특히 헨리 브리그스(Henry Briggs, 1561-1631)는 런던을 떠나 에든버러까지 네이피어를 직접 찾아가, 당신이 발견하기 전까지 아무도 발견하지 못했다는 것이 의아하다며 존경을 바친다. 다음 해 한 번 더 찾아간 브리그스는 10진법을 쓰는 인간에게 편리하게 하기 위하여 1에서의 로그값이 0이 되도록 로그의 정의를 조정하자는 의견을 내고 네이피어도 동의한다. 다만 네이피어는 병으로 인해 쇠약해 있어서, 새로운 로그표의 계산은 브리그스가 이어받게 된다. 브리그스는 시행착오를 거친 끝에 수 0에서의 로그값이 1이 되도록 하는 로그, 오늘날 상용로그라 부르는 로그표를 작성하기 시작한다. 브리그스는 1617년에는 1부터 1000까지의 로그값을 필두로, 10년 뒤에는 1부터 만, 9만부터 10만까지의 자연수에 대한 상용로그의 표를 세상에 내놓는다. 이 로그표는 3세기동안 가장 우수한 로그표로서 자리를 유지하였다. 브리그스의 상용로그표의 값은 다음과 같다.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	비례부분								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117	1	2	3	4	5	7	8	9	10
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	비례부분								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

브리그스가 제안한 상용로그는 다음과 같이 설명이 가능하다. 주어진 양의 수 N이 10^L과 같이 10의 지수승으로 표현가능하다고 하면, L=$\log N$과 서로 동치가 된다. 즉, 두 식은 정확하게 동일한 정보를 준다.

$$N = 10^L \qquad L = \log_{10} N$$

▶ 로그를 이용한 계산

상용로그는 $\log_{10} x$ 와 같이 10을 밑으로 하는 로그이다. 보통은 10을 생략하여 $\log x$ 로 나타낸다. 상용로그(Briggs log, $\log_{10} x$)의 관계식 정리하면 다음과 같다.

$$\log_e a + \log_e b = \log_e (a*b)$$
$$\log_e a - \log_e b = \log_e (a/b)$$
$$n*\log_e a = \log_e a^n$$

다음으로 상용로그의 적용 예를 적어보면 다음과 같다.

$$\log_{10} 1 = 0$$

$\log_{10}10 = 1$

$\log_{10}100 = 2$

$\log_{10}1000 = 3$

위에서와 같이 진수 x가 등비급수 (1, 10, 100, 1000, 1000)적으로 변하는데 지표 $\log x$의 값은 산술적(1,2,3,4)으로 변하는 것을 볼 수 있다.

상용로그표를 활용하는 방법은 다음과 같다. 그렇다면 왜 로그가 중요할까 ? 휴대용계산기가 없던 시절인 1970년대라고 가정하고 다음 식을 계산해 보자.

$$x = \sqrt[3]{\frac{493.8*23.67^2}{5.104}}$$

$$x = (\frac{493.8*23.67^2}{5.104})^{\frac{1}{3}}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log x = \frac{1}{3}(\log 493.8 + 2\log 23.67 - \log 5.104)$$

로그표를 활용하면

$$\log x = \frac{1}{3}(2.6935 + 2*1.3742 - 0.7079)$$

$$\log x = 1.5780$$

역로그를 취하면

$$x = 37.84$$

이러한 계산방법을 두고 라플라스는 말했다.

“ 로그의 발견은 작업량을 줄임으로써, 천문학자의 수명을 두 배로 만들었다.”

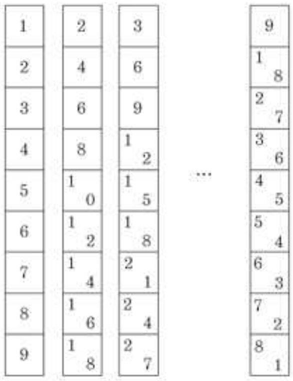
라플라스 [Laplace, Pierre Simon 1749~1827] : 프랑스의 수학자, 물리학자, 천문학자. 노르망디의 빈농 출신. 어릴 때부터 비상한 재능이 있었고, 1784년에는 에콜 노르말의 교수가 되었다. 나폴레옹 1세 하에서 내상(內相, 1799)과 백작이 되었고, 또 왕정복고 시기에 후작의 지위를 받았다(1817). 정치적으로는 입장이 불명확했다. 해석학에 뛰어나, 이것을 천체역학이나 확률론에 응용하여 많은 성과를 얻었다. 명저 『천체역학』(Mécanique céleste, 5권, 1799~1825)은 뉴튼 이래의 천체역학을 집대성하여, 태양 등 천체계에 관련된 많은 현상을 해명했다.
특히 그 섭동론(攝動論)은 천왕성 운행의 이론적 계산치의 차이를 이용하여 해왕성의 크기와 위치를 예언하고, 그 발견에 기여한 르 베리에(Urbain J. J. Le Verrier, 1811~77, 프랑스의 천문학자. 해왕성은 J.Galle에 의해 1846년 9월에 발견됨) 등의 사업의 기초를 마련했다. 또 태양계의 기원에 대해 칸트-라플라스설인 성운설(星雲說)을 완성시켰다. 그 외에도, 수학, 물리학 연구에 뛰어난 업적을 남겼다.

▶ 네이피어의 막대 [Napier's bones]

로그(logarithm)를 발견한 영국의 수학자 네이피어(John Napier, 1550～1617)는 곱셈을 쉽게 계산할 수 있는 막대를 고안했다. 이것을 네이피어의 막대 또는 네이피어의 뼈(Napier’s bones) 라고 한다.

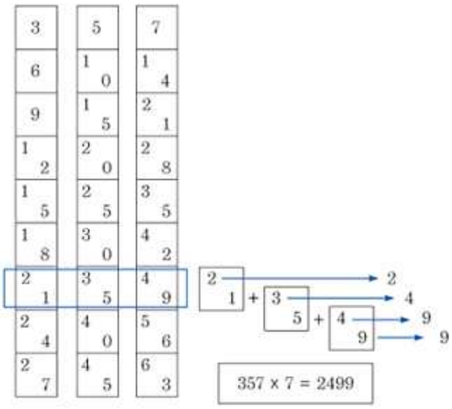
네이피어는 뛰어난 수학자가 아니었지만 그의 창작품들은 현대 수학의 발전에 커다란 기여를 했다. 그는 천문학에 유난히 관심이 많았는데 그의 이러한 관심이 로그를 발명하게 하는 계기가 되기도 하였다. 그가 발명한 로그와 로그표는 엄청나게 큰 수의 계산이 필요한 천문학에서 그 진가를 발휘했는데, 이것 역시 네이피어 막대처럼 곱셈을 덧셈으로 바꾸어 계산하는 그의 놀라운 아이디어에서 비롯된 것이다.

네이피어의 막대는 아홉 개의 긴 막대로 구성이 되어 있는데, 각 막대에는 1부터 9까지 숫자들의 곱셈표가 그려져 있다. 즉 그림과 같이 첫 번째 막대에는 자연수 1부터 9까지가 쓰여 있고, 두 번째 막대에는 2의 배수인 2, 4, 6, …, 18이 쓰여 있다. 또 세 번째 막대에는 3의 배수인 3, 6, 9, …, 27이 쓰여 있다. 이런 식으로 네 번째에서 아홉 번째 막대에도 각각 4의 배수부터 9의 배수까지 차례로 쓰여 있는 것이다.



네이피어 막대

네이피어의 막대로 곱셈을 하는 방법은 다음과 같다. 예를 들어 357과 7의 곱을 구하려면, 첫 번째 수가 3, 5, 7로 시작되는 세 개의 막대를 나란히 놓은 상태에서 각 막대의 일곱 번째 줄을 그림과 같은 방법으로 읽으면 된다. 이것은 비교적 간단한 덧셈의 계산을 이용하여 곱셈을 하는 원리이다.



네이피어막대를 이용한 계산법

오늘날에는 계산기와 고도로 발달된 컴퓨터의 등장으로 고도의 복잡한 계산을 손쉽게 할 수 있게 되었지만 당시 네이피어의 막대에 의한 곱셈의 계산법은 놀라울 정도로 획기적인 발명이었고, 이것은 20세기 초까지 공업계의 기술자들이 사용했던 계산기의 모태가 되었다.

► 자연로그의 정의

$a>0$, $a\neq 1$일 때, $x=a^y$의 표현식을 다음과 같이 바꾸어 표현할 수 있다.

$$y=\log_a x$$

a가 1이 아닌 양수일 때, y는 a를 밑, x를 진수로 하는 $\log_a x$라 한다. 또한 y를 x의 로그함수(로그함수의 값의 실수부분은 지표, 소수부분은 가수)라 한다. 대수방정식(對數方程式)이라는 용어는 '로그 방정식(方程式)'의 옛말을 나타낸다.

자연로그는 로그의 정의식에서 밑 $a=e$일 때, 즉, $x=e^y$, $y=\log_e x$인 경우를 말한다. 즉, 자연로그는 밑을 e로 하는 로그를 말한다.

▶ 상용로그와 자연로그의 비교

이 말을 이해하기 위하여 상용로그(밑=10)에 대하여 생각해보자. 예를 들어, 10의 제곱은 100이므로 100의 상용로그는 2이다. 10의 세제곱은 1000이므로 1000의 상용로그는 3이다. 그리고 10의 2.7제곱은 500이므로 상용로그는 2.7이다.

동일한 방법으로 e의 (6.9)제곱은 1,000이므로 1000의 자연로그는 (6.9)가 되며, e의 (4.6)제곱은 100이므로 100의 자연로그는 (4.6)이고, e의 (0.7)제곱은 2이므로 2의 자연로그는 0.7이다.

상용로그	지수	자연로그	지수
$\log 1=0$	$10^0=1$	$\ln 1=0$	$e^0=1$
$\log 10=1$	$10^1=10$	$\ln 10=2.303$	$e^{2.303}=10$
$\log 100=2$	$10^2=100$	$\ln 100=4.605$	$e^{4.605}=100$
$\log 1000=3$	$10^3=1000$	$\ln 1000=6.908$	$e^{6.908}=1000$
$\log 10000=4$	$10^4=10000$	$\ln 10000=9.210$	$e^{9.210}=10000$
$\log 100000=5$	$10^5=100000$	$\ln 100000=11.513$	$e^{11.513}=100000$

로그표가 발표된 후, 로그자가 발명되었으며 이후 350년 동안 모든 과학자와 공학자의 충실한 동료이었다. 하지만, 1970년 초 휴대용 계산기가 시판되면서 로그자는 10년도 안되어 로그 연산자는 사라져 버렸다.

③ 쌍곡선 함수 $y=\dfrac{1}{x}$ 구적(적분)에서의 e

아르키메데스는 쌍곡선 함수 $y=\dfrac{1}{x}$에 대한 구적(그래프와 x축이 이루는 면적을 계산)을 시도했지만 실패했다. 17세기에 접어들면서 몇 명의 수학자가 독자적으로 이 문제를 해결하려고 시도했다. 그 중 유명한 사람이 데카르트(1596-1650)와 페르마(1601-1665)이었다. 이들은 파스칼과 함께 미적분학이 체계화되기 이전 시대에 수학계를 이끈 프랑스의 위대한 삼두마차였다. 이들은 쌍곡선 함수 $y=\dfrac{1}{x}$에 대한 구적 계산을 시도하였지만 모두 실패하였고, 1647년 벨기에의 생-빈센트와 그의 동료들에 의하여 어느 정도의 성과가 발표되었다.

르네 데카르트 [René Descartes, 1596.3.31 ~ 1650.2.11] 프랑스의 철학자·수학자·물리학자. 근대철학의 아버지로 불리는 데카르트의 형이상학적 사색은 방법적 회의(懷疑)에서 출발한다. '나는 생각한다, 고로 나는 존재한다(cogito, ergo sum)'라는 근본원리가 《방법서설》에서 확립되어, 이 확실성에서 세계에 관한 모든 인식이 유도된다.

수학자로서는 기하학에 대수적 해법을 적용한 해석기하학의 창시자로 알려졌다. 물체에는 무게라는 실재적 성질이 있기 때문에 떨어지는 경향이 있다고 설명하는 스콜라적 자연학에 만족하지 못하고, 물리 수학적 연구를 통하여 물질, 즉 연장(延長)이라는 기계론적 자연관으로 이끌려 갔다. 그의 형이상학적 사색은 이른바 방법적 회의(懷疑)에서 출발한다.

피에르 페르마 [Pierre de Fermat, 1601.8.17 ~ 1665.1.12] 프랑스의 수학자. 17세기 최고의 수학자로 손꼽힌다. 근대의 정수 이론 및 확률론의 창시자로 알려져 있고, 좌표기하학을 확립하는 데도 크게 기여하였다.

수학을 취미로 하는 아마추어 수학자였으나 여러 방면에 획기적인 업적을 남겼으며 나중에 아이삭 뉴턴(Isaac Newton)이 미적분학에 응용하였던 극대값과 극소값을 결정하는 여러 가지 방법을 창안하였다.

그의 연구 성과 가운데 우선 미적분(微積分)에 관한 업적을 들 수 있다. 연속곡선(連續曲線)에 접선(接線)을 긋는 방법으로서 제기된 이 문제는 페르마를 '극값[極値]의 문제'로 유도하여 미분의 개념에 도달시킨 것이며, 미적분학의 창시자로 일컬어지는 뉴턴이나 라이프니츠가 태어나기 10여 년 전에 이런 성과가 얻어진 점은 주목할 만하다

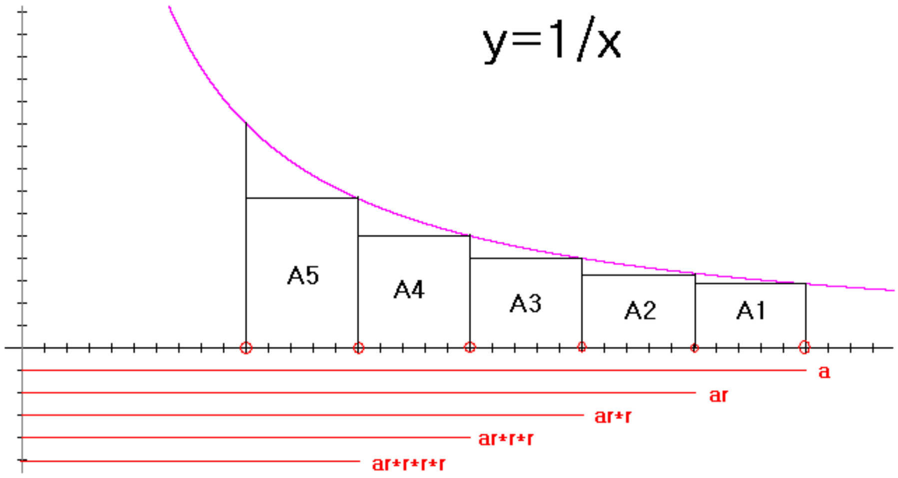
파스칼[Pascal, Blaise, 1623~1662] 프랑스의 수학자, 물리학자, 발명가, 철학자, 신학자이다.

12세 때 유클리드 기하학에 몰두하여 16세에는 데자르그(Desargues)의 사영기하학(射影幾何學)을 근거로 하여 『원추곡선론』(Essai pour les coniques)을 기술하였고 그 후 1642년 계산기를 발명하였다.

파스칼은 확률론, 수론(數論) 및 기하학 등에 걸쳐서 공헌한 바가 크다. 1646년 토리첼리의 기압계 실험을 배움으로써 진공이 존재한다는 가설을 주장하였는데, 그의 진공 및 공기 압력에 관한 이론은 자연에 관한 역학이론을 발전시키고 자연의 신비성을 제거하는 데 큰 몫을 했다. 즉 그는 자연탐구에 있어서는 추리나 경험보다 권위가 앞서야 한다고 했는데, 그의 과학적 견해와는 다른 경향을 보인다.

대수(로가리즘)와 쌍곡선의 관계는 세인트 빈센트(Gregory of Saint Vincent, 1584-1667)가 구적법에서 간접적으로 설명하였고, 데 사라사(Alphonso Antonio de Sarasa, 1618-1617)가 처음으로 주석을 달았다. 이후, 오일러에 이르러서 복소수를 이용하여 대수 이론에 대수와 원함수와의 관계가 만들어졌다.

빈센트는 현대적 미적분이 아니라 구분구적법으로 $y=\frac{1}{x}$의 넓이를 계산하고자 하였다. 면적을 계산하는 방법을 정리하면 다음과 같다.



각각의 면적을 구하여보자.

$$A1=(a-ar)*1/a=a(1-r)/a=(1-r)$$
$$A2=(ar-ar*r)*1/ar=ar(1-r)/ar=(1-r)$$
$$A3=(ar*r-ar*r*r)*1/ar*r=ar*r(1-r)/ar*r=(1-r)$$
$$A4=(ar*r*r-ar*r*r*r)*1/ar*r*r=ar*r*r(1-r)/ar*r*r=(1-r)$$

x의 값이 0에서부터 일정한 (r)값 즉, 등비수열로 증가하면 그에 대응하는 넓이는 똑같은 증분 $(1-r)$ 즉, 등차수열로 구적이 증가하는 것을 알 수 있다. 이것은 넓이와 거리사이에 로그 관계가 있음을 단적으로 보여준다.

쌍곡선 구적과 관련하여 그리스 사람들이 싸우기 시작한지 2000년이 지나 해결이 보이기 시작하였는데 여전히 한 가지 문제점이 남아있다. 공식 $A(t)=\log t$는 변수 t에 관한 함수로 쌍곡선 아래의 넓이를 나타내지만, 로그의 밑이 정해지지 않았기 때문에 수치적인 계산은 여전히 적절하지 않다. 이 공식이 실용적이기 위해서는 반드시 로그의 밑을 결정해야 한다. 로그의 밑은 무한급수 그리고 미적분학의 개념을 통하여 정의된다.

④ 자연상수 e : 18세기 전반 지수함수의 미적분학

한 개인의 창조적인 정신의 산물로 청전벽력과 같이 이 세상에 갑자기 나타난 것이 로그의 발명이라고 하면, 수 십년동안 매우 많은 사람들의 머리 속에서 기나긴 진화과정을 거쳐 나타난 산물이 있는데 이것이 미적분학의 발견이다. 흔히, 미적분학은 1665년 1675년 사이에 뉴턴(1642-1727)과 라이프니츠(1646-1716)의 발견이라고 하지만, 이것이 전적으로 정확하다고 할

수는 없다.

 미적분학이라는 의미의 “calculus”는 수학의 특별한 분야인 미분적분학과는 아무런 관계가 없다. 미적분학의 의미를 제안한 사람은 라이프니츠였다. 미분학은 변화에 관한 연구이며, 좀 더 구체적으로 말하면 “변량의 변화율”에 관한 연구이다. 주변에서 찾아볼 수 있는 대부분의 물리현상은 시간에 따라 변화하는 양과 관계가 있다. 미적분학의 두 가지 기본적인 문제인 접선문제(미분)와 넓이 문제(적분)가 서로 ‘역’관계의 문제라는 사실이 미적분학의 핵심이다.

17세기 1684-86년 고트프리트 라이프니츠[Gottfried Leibniz, 1646~1716]는 미적분학을 처음으로 완전히 전개되고 실행 가능한 체계로 만들었다. 18세기가 되어서 테일러(Brook Taylor, 1685-1731), 매클로린(Colin Maclaurin, 1698-1746)등이 미적분학을 더욱 발전시켰으며, 레온하르트 오일러[Leonhard Euler, 1707~1783]는 나아가 변분학을 창시하였다.

 오일러(Leonhard Euler, 1707~1783)는 아시아 페테르부르크의 궁정 시절, 나이 21세에 "대포의 점화에 대해서 최근 이루어진 실험에 관하여"라는 논문에서 다음과 같이 제안하였다.

“ 로그를 취한 값이 1인 수를 e라고 적기로 하자. 이 수는 2.7182818...이고 10을 밑으로 하는 e의 로그는 0.4342944...이다 ”

고트프리트 라이프니츠[Gottfried Leibniz, 1646~1716] 독일 계몽철학의 서장을 연 철학자 수학에서 뉴튼과는 별도로 미적분학의 방법을 창안하였고, 물리학에서는 에너지 보존의 법칙을 예견했다. 또 지질학, 생물학, 역사학에 대해서도 연구했다. 그의 철학에 따르면, 세계는 무수히 많은 단일불가분(單一不可分)의 실체, 즉 능동적인 힘의 단위로서 자신 속에 전(全)우주를 표상하는 '우주의 거울'로서의 모나드로 구성된다고 주장하였다.

브룩 테일러 (Brook Taylor, 1685-1731) 영국의 수학자. 미분학에서 유명한 ‘테일러의 정리(이것을 급수로 전개한 것이 테일러 급수이다)’를 저서 《증분법(增分法) Methodus Incrementorum directa et inversa》(1715)에서 밝혔는데, 테일러의 도출(導出)로는 급수의 수렴성(收斂性)에 관한 고찰이 불충분하였다. 그 후, C.매클로린이 무한급수의 고찰로 이것을 재정식화하여 그 저서에 기술함으로써(1742), 흔히 ‘매클로린의 정리(또는 급수)’로도 불린다.

콜린 매클로린[Colin Maclaurin, 1698-1746] 뉴턴의 학통을 이어, 플럭션법을 연구, 미분학에 이바지하고, 이것을 기하학에 응용하였다. 급수전개에 관한 ‘매클로린의 정리’를 발견하여 저서 《유율법(流率法)》(1742)을 기술하였으며, 이 책에는 조석(潮汐)의 이론 등도 포함되어 있어 물리학에도 이바지하였다.

레온하르트 오일러 [Leonhard Euler 1707.4.15 ~ 1783.9.18] 스위스의 수학자·물리학자.

수학·천문학·물리학 분야에 국한되지 않고, 의학·식물학·화학 등 많은 분야에 걸쳐 광범위하게 연구하였다. 수학 분야에서 미적분학을 발전시키고, 변분학을 창시하였으며, 대수학·정수론·기하학 등 여러 방면에 걸쳐 큰 업적을 남겼다.

수학자로서의 연구를 시작한 시기는 뉴턴이 죽은 시기에 해당하여 해석기하학·미적분학의 개념은 갖추어져 있었으나 조직적 연구는 초보단계로 특히 역학·기하학의 분야는 충분한 체계가 서 있지 않았다. 이러한 미적분학을 발전시켜 《무한해석 개론 Introduction in Analysis Infinitorum》(1748) 《미분학 원리 Institutiones Calculi Differontial》(1755) 《적분학 원리 Institutiones Calculi Integrelis》(1768～1770), 변분학(變分學:극대 또는 극소의 성질을 가진 곡선을 발견하는 방법)을 창시하여 역학을 해석적으로 풀이하였다.

이 밖에도 대수학·정수론(整數論)·기하학 등 여러 방면에 걸쳐 큰 업적을 남겼다. 그 중에도 삼각함수의 생략기호(sin, cos, tan)의 창안이나 ‘오일러의 정리’ 등은 널리 알려져 있다.

오일러는 복리계산을 위한 일반식 $a(1+r)^n$에서 작은 수 r을 1/N 으로 바꾸어 $(1+1/N)^N$식으로 변형하고 N이 무한히 큰 경우에 대하여 이항정리를 적용하여 다음과 같은 무한급수의 식을 제안하였다.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1*2}+\frac{1}{1*2*3}+\frac{1}{1*2*3*4}+....$$

그리고 이 식의 수렴 값을 $e = 2.7182818...$ 라고 쓰고 오일러 수(Euler number)라고 하였다.

일반식 $(1+h)^{(\frac{1}{h})}$와 로그의 관계를 정리하면 다음과 같다.

$(1+h)^{(\frac{1}{h})} = Y$라고 하고, 양변에 로그 그리고 극한을 취하면

$$\frac{1}{h}ln(1+h) = \ln Y$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}ln(1+h) = \lim_{h\to 0}\ln Y$$

부정형의 계산을 위하여 로피탈의 정리를 적용하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(1+h)}}{1} = \ln Y$$

$1 \;=\; \ln Y$

이 된다. 그러므로 $Y \;=\; e$이 유도된다. 그리하여 오일러는 $\lim_{h\to 0}(1+\frac{1}{h})^{h} = e$하고 제안하였다.

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} \;=\; e \qquad \text{or} \qquad \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n} \;=\; e$$

그 후, 사람들은 e 라는 수를 "오일러 수"라 불러주기로 하였다. 또한 오일러는 e와 i와 π및 0과 1사이의 관계를 보여주는 특별하고 유명한 오일러 공식

$$e^{j\pi}+1=0$$

를 발표하였다. 이것은 오일러가 1743년에 미분방정식 $y^{''}+y=0$을 연구하다가 발견한 공식으로 1748년에 발표한 그의 논문 'Introductio'에 써놓은 무한급수를 이용한 exp(x) 즉, e^{x}전개공식에서 유도되었다.

$$e^{x} \;=\; 1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^{2}+\frac{1}{3!}x^{3}+\frac{1}{4!}x^{4}+\cdots\cdots$$

$$\sin x \;=\; x-\frac{1}{3!}\;x^{3}+\frac{1}{5!}x^{5}-\frac{1}{3!}\;x^{3}+\cdots+(-1)^{n}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots$$

$$\cos x \;=\; 1-\frac{1}{2!}\;x^{2}+\frac{1}{4!}x^{4}-\frac{1}{6!}\;x^{6}+\cdots+(-1)^{n}\frac{1}{2n!}x^{2n}+\cdots$$

위에 주어진 식으로부터 x대신에 jθ 즉, $e^{j\theta}$, $\sin^{j\theta}$, $\cos^{j\theta}$의 급수전개식을 이용하면

$$e^{jx}=1+\frac{1}{1!}(jx)+\frac{1}{2!}(jx)^{2}+\frac{1}{3!}(jx)^{3}+\frac{1}{4!}(jx)^{4}+\ldots\ldots$$

$$e^{j\theta} \;=\; \cos\theta+j\sin\theta$$

으로 오일러 항등식(Euler's Identity)를 구할 수 있다. 오일러 항등식은 복잡한 삼각함수의 연산을 지수함수의 형태로 변환하여 계산하는 것을 가능하게 해준다.

▶ 미분계수

함수 $y=f(x)$에 대한 변화율, 미분계수는 또는 도함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

다음과 같은 지수함수 $y = b^x$에 대한 도함수(변화율 혹은 미분)를 구해보자.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b^{x+\Delta x} - b^x}{\Delta x}$$

지수법칙을 적용하면

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{b^x (b^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

이다. 여기서 b^x는 Δx와 무관하므로 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\frac{dy}{dx} = b^x \lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h}$$

여기서 $h = \Delta x$를 의미한다. 상기 식에서 $\lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h}$의 극한이 존재하는 것에 대한 증명은 생략하기로 하고 극한을 k라고 하고 식을 정리하면 다음과 같다. 즉,

$k = \lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h}$라고 하면 $\frac{dy}{dx} = k \cdot b^x$

이다. 상기식의 의미는 다음과 같다.

"지수함수의 도함수는 그 자신의 함수에 비례한다."

한 걸음 나아가 $k = 1$을 만족하는 b의 값을 구하여 보자. 즉, $\lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h} = 1$을 만족하는 b의 값을 구하는 것이다.

임의의 b의 값에 대해서 $\lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h} = 1$ 을 만족하려면 $\frac{b^h - 1}{h} = 1$을 항상 만족하면 된다. 그러므로

$$b^h = 1 + h$$

이고, 정리하면

$$b = \sqrt[h]{1+h} = (1+h)^{1/h}$$

이다. 그러므로 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$\lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h} = 1, \qquad b = \lim_{h \to 0} (1+h)^{1/h}$$

결과적으로 $y = b^x$에 대한 도함수 $\frac{dy}{dx} = b^x$ 이 되기 위한 b의 값은 다음과 같다.

$$b = \lim_{h \to 0} (1+h)^{1/h}$$

복리계산을 위한 일반식의 형태와 동일하다. 오일러는 밑 b를 e(이유는 모름)라고 표기하고 다음과 같이 정의했다.

"지수함수 e^x의 미분은 그 자신을 함수 e^x가 된다."

"임의의 함수의 미분이 그 자신이 되는 함수는 지수함수 e^x가 유일하다."

▶ 로그함수 $y = \ln_e x \quad e > 0, e \neq 1$ 의 미분계수를 구하라

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln_e(x+h) - \ln_e x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} ln_e(\frac{x+h}{x})$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x}{x} \frac{1}{h} ln_e(1 + \frac{h}{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} ln_e(1 + \frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

위의 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$= \frac{1}{x} ln_e \lim_{h \to 0} (1 + \frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

앞에서 정리한 바와 같이 $\lim_{h\to 0}(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}=e$ 이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$$

이것은 쌍곡선 함수 $y=\frac{1}{x}$의 구적이 $y=\ln x$ 가 된다는 것을 보여준다. 즉,

$$\ln x=\int\frac{1}{x}dx$$

▶ 관계식에서 x대신 $1+x$를 대입하면

$$\ln(1+x)=\int\frac{1}{(1+x)}dx$$

이 되는데 이는 수학사에 엄청난 영향을 발휘하게 된다. 왜냐하면

$$\frac{1}{(1+x)}=1-x+x^2-x^3+x^4-..........$$

와 같은 관계식을 적용하면

$$\ln(1+x)=\int 1-x+x^2-x^3+x^4-..........dx$$

이고,

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5-..........$$

으로 표현이 가능하기 때문이다. 즉, 로그 함수가 다항함수로 표현이 가능하다는 것을 보여주기 때문이다.

3. 지수함수 총괄

① 쌍곡선 함수 $y=x^{-1}$의 적분

$$\int\frac{1}{x}dx=\ln x+C$$

함수 $y=e^x$의 변화율 $dy/dx=e^x=y$이다. 식을 변형하면

$$dx/dy=1/e^x=1/y$$

의 관계가 성립한다. 함수 $y=e^x$의 로그관계식은 $x=\ln y$이다. 그러므로 $y=\ln x$이면, $dy/dx=1/x$이다.

$$\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x}, \qquad \ln x=\int \frac{1}{x}dx$$

의 관계식이 성립한다.

$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$의 관계식은 $n=1$을 제외한 모든 실수 n에 대하여 성립하는데 이것은 $n=1$이면 적분식의 분모가 0이 되기 때문이다. 상기 관계식은 $n=1$인 경우에 대한 해를 제공한다.

② 지수함수 $y=e^x$ [자신의 미분계수와 동일한 유일한 함수]

지수함수 $x=e^y$를 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=e^y$$

이다. 이 수식의 역을 취하면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{dx/dy}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{x}$$

이 된다. 여기서 y는 다음과 같이 표현된다.

$$y=\log_e x=\ln x$$

상기 식을 대입하여 정리하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$$

여기서, x^{-1} 이라는 결과는 아래와 같은 일반적인 미분공식

$$\frac{d}{dx}x^n = \frac{1}{n}x^{n-1}$$

으로는 얻을 수 없는 결과이다.

지수함수 $y=a^x$의 미분계수는 $y'=a^x \ln_e a$이다.

③ 복소함수 e^{x+iy} 즉, e^z의 미분계수

$x+1=0$을 만족하는 x의 값은 -1이다. 음수 단위인 수 '-1'을 주어진 방정식의 근이라고 정의하는 것과 마찬가지로 $x^2+1=0$을 만족하는 근을 $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$로 정의한다. 주어진 방정식을 푼다는 것은 제곱이 음수가 되는 수를 찾으라는 것이다. 이는 실수 영역에서 근이 존재하지 않는 것을 의미한다.

16세기에 수학계에 처음으로 등장한 $i=\sqrt{-1}$, $i^2=-1$는 상상의 수 허수[imaginary number]라고 불리우는 개념은 아직도 신비로운 분위기였다. 그렇지만, 19세기 초가 되어 수학자들은 비로소 복소수를 진정한 수로 받아들였고 편하게 사용하게 되었다.

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + j\sin y)$$

함수 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$가 점 $z=x+iy$에서 미분가능하면, 그 도함수는 다음과 같다.

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x}$$

혹은

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial v}{\partial y} - j\frac{\partial u}{\partial y}$$

가 되는데 두 표현은 코시-리만 방정식에 의하여 서로 똑같다.

주어진 함수 $w=e^z$의 경우, $u=e^x\cos y$, $v=e^x\sin y$이므로

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x\sin y$$

그러므로 다음 결과를 얻는다.

$$\frac{d}{dz}e^z = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z$$

④ i^i를 구하라.

오일러 항등식 $e^{i(\pi/2)} = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = i$

$i = e^{i\pi/2}$

이므로,

$i^i = (e^{i\pi/2})^i = e^{ii\pi/2} = e^{-\pi/2}$

그러므로 i^i는 실수값을 가진다.

4. 자연상수 e는 왜 초월수인가?

원주율 π의 역사는 기원전 2000년 이상 고대까지 거슬러 올라간다. 하지만, 자연상수 e의 역사는 겨우 4세기 정도이다. 자연상수 e와 관련된 역사를 정리하면 다음과 같다.

1) 복리이자의 계산에서부터 출발하였다. - 인간이 만들어낸 계산과정-
2) 쌍곡선 함수의 구적이 로그함수의 형태가 되는 것이 발견되었다.
3) 미적분학의 발견과 함께 지수함수는 자신의 도함수와 같다는 사실이 밝혀졌다.
4) 이후 해석학에서 지수함수 e^x는 중추적인 역할을 담당한다.

이러한 과정을 거쳐 e라는 수가 발전하였으나, 현재까지도 e라는 수의 정확한 의미는 풀리지 않은 채로 남아 있다.

- 자연계는 수학의 지배를 받는다. 인간의 의식에 의하여 발생한 음수 허수를 제거하면, 복소평면에서 영을 제외한 양의 실수축이 자연계의 수이다.

- 연속미분을 수행해도 자신을 유지하는 함수는 $y = e^x$가 유일하다.
- 연속미분을 수행해도 자신을 유지하는 함수의 의미에서 초월수의 의미를 찾는다.

1^x e^x 5^x 의 비교